ჯუანშერ ჩქარეული

ლექციები სპეციალურ და ზოგად ფარდობითობის თეორიაში

2009

სარჩევი

I. სივრცე და დრო

თავი I. სივრცე-დრო: ფიზიკური საფუძვლები

თავი II. სივრცე-დრო: მათემატიკური აღწერა

II. კლასიკური ნაწილაკები და ველები

თავი I. ნაწილაკები

თავი II. ნაწილაკები: რელატივისტური თეორია

თავი III. ველები

III. გრავიტაცია

თავი I. გრავიტაციული ურთიერთქმედება – ევრისტული მიახლოვება

თავი II. გრავიტაციული ურთიერთქმედება – ზოგადი განხილვა

თავი III. ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ძირითადი გამოყენებები

ლიტერატურა

წინამდებარე ლექციების კურსი სპეციალურ და ზოგად ფარდობითობის თეორიაში, რომელსაც ავტორი წლების განმავლობაში კითხულობდა ე.ანდრონიკაშვილის ფიზიკის ინსტიტუტში და ბოლო დროს ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტში, მიზნად ისახავს გადასცეს მკითხველს კომპაქტური თანამედროვე კურსი ნაწილაკებისა და ველების კლასიკურ თეორიაში - ისე, როგორც მას ვხედავთ დღეს სამყაროს ფუნდამენტური კანონზომიერებათა აღმოჩენისა და შესწავლის შედეგად ბოლო ათწლეულების განმავლობაში. ეს აღმოჩენები მიგვითითებენ ფიზიკის უნიკალურ უნივერსალურობაზე და იმ ძირითად სიმეტრიის პრინციპებზე, რომლებიც განაპირობებენ ფიზიკური სისტემის ევოლიუციას იმის განურჩევლად კლასიკურია ეს სისტემა თუ კვანტური, ელემენტარული თუ შედგენილი.

I. სივრცე და დრო

I. სივრცე-დრო: ფიზიკური საფუძვლები.

1. შესავალი.

ა) *ათვლის ინერციული სისტემა*.

ფიზიკური სამყაროს კანონზომიერებანი უშუალოდ არიან დამოკიდებული ათვლის სისტემაზე, რომელშიც ხორციელდება მათი ექსპერიმენტული დამზერა და შესწავლა. რადგან ფიზიკური მოვლენები მიმდინარეობენ სივრცესა და დროში უმარტივესი ათვლის სისტემა იქნებოდა სისტემა, რომელშიც ელემენტარული ფიზიკური ობიექტისათვის (*ეფო*) მთელი სივრცე ერთგვაროვანი და იზოტროპულია, ხოლო დრო ერთგვაროვანი. ასეთ სისტემას უწოდებენ *ათვლის ინერციული სისტემას*.

ჩვენს მიერ მოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ განვიხილავთ ათვლის ინერციულ სისტემას დედამიწის მახლობლად, მასში არ უნდა იგრძნობოდეს გრავიტაციული ძალები. დედამიწის გრავიტაციული ველის არაერთგვაროვნების გამო, ერთმანეთისაგან დიდ მანძილზე მოთავსებული ნაწილაკები განიცდიან სხვადასხვა ზემოქმედებას დედამიწის მხრიდან. მაგრამ ჩვენ გვჭირდება რომ მექანიკის ყველა კანონს ჰქონდეს მარტივი სახე ნაწილაკთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში. ამიტომ საჭიროა მოვიცილოთ ყველა გარე ფაქტორებით გამოწვეული ფარდობითი აჩქარება. ‘‘მოვიცილოთ’’ იმ გაგებით, რომ ამ აჩქარებების სიდიდე დავიყვანოთ დაკვირვებად საზღვარს ქვემოთ, რათა იგი გავლენას არ ახდენდეს მოძრაობის ძირითად სურათზე. ეს შეიძლება მიღწეულ იქნას სივრცის საკმარისად მცირე არის არჩევით, რომლის შიგნითაც ობიექტების ფარდობითი აჩქარება მცირე იქნება.

როგორი მაღალიც არ უნდა იყოს ჩვენი ხელსაწყოების მგრძნობიარობა, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ავიღოთ სივრცის იმდენად მცირე არე, რომ ფარდობითი აჩქარებები აღმოჩნდეს ხელსაწყოების მგრძნობიარობის საზღვრის ქვემოთ. არჩეული სიზუსტის ფარგლებში სივრცის მოცემულ არესთან დაკავშირებული სისტემა შეიძლება ჩაითვალოს ათვლის ინერციულ სისტემად.

ამრიგად, შეგვიძლია მოვიყვანოთ ათვლის ინერციული სისტემის განსხვავებული განმარტება:

ათვლის სისტემას ეწოდება ინერციული სივრცე-დროის რაღაც არეში, თუ მთელს ამ არეში რაღაც მოცემული სიზუსტით, ნებისმიერი საწყისად უძრავი საცდელი ნაწილაკი ინარჩუნებს თავის უძრაობის მდგომარეობას, ხოლო ნებისმიერი

საცდელი ნაწილაკი, რომელიც საწყისად მოძრაობდა, აგრძელებს მოძრაობას სიჩქარის სიდიდისა და მიმართულების შეუცვლელად.

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ სისტემა ინერციულია სივრცე-დროის შემოსაზღვრულ არეში, ე.ი. პრაქტიკული თვალსზრისით ინერციული სისტემა ყოველთვის ლოკალურია და არა გლობალური.

ბ) *ფარდობითობის პრინციპი*.

ფარდობითობის პრინციპი პირველად გამოთქვა ნიუტონმა, როგორც ერთ-ერთი შედეგი მოძრაობის კანონებისა: ''*სივრცის გარკვეულ არეში მოქცეული სხეულების ერთმანეთის მიმართ ფარდობითი მოძრაობა, ერთნაირია - უძრავია ეს არე თუ მოძრაობს თანაბრად და სწორხაზოვნად ბრუნვის გარეშე.*''

ფარდობითობის პრინციპის აზრი საკმარისად მარტივია; მთავარია, რომ ყველა მოძრავი სისტემის შიგნით ჩატარებულ ცდაში, ფიზიკის კანონები გამოიყურებოდეს ისევე როგორც უძრავ სისტემაში.

გულმოდგინე ძიების მიუხედავად ამ პრინციპის დარღვევის ფაქტი არავის აღმოუჩენია. ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ ფიზიკის კანონების როგორც ფორმა, ასევე მათში შემავალი კონსტანტების რიცხვითი მნიშვნელობებიც ერთნაირია ყველა ათვლის ინერციულ სისტემაში. ესე იგი *ფიზიკის კანონების მეშვეობით შეუძლებელია ერთი ინერციული ათვლის სისტემის გარჩევა მეორისაგან.*

2. გალილეის სივრცე-დრო.

ა) *გალილეის გარდაქმნები.*

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ერთი ინერციული ათვლის სისტემიდან მეორეში გარდაქმნის ფორმულები. ვთქვათ K ათვლის სისტემაში ხდომილება აღიწერება x, y, z, t კოორდინატებით. გარდაქმნის ფორმულების მეშვეობით შეიძლება ვიპოვოთ იგივე ხდომილების x', y', z', t' კოორდინატები K' ინერციულ სისტემაში.

როგორც ცნობილია, გალილეის დრო-სივრცეში დრო აბსოლუტურია, ე.ი. $t=t'$. შემდეგ, თუ საკოორდინატო ღერძებს ისე შევარჩევთ, რომ x და x' ღერძები ერთმანეთს ემთხვეოდეს, y და z იყოს პარალელური შესაბამისად y' და z' ღერძებისა, ხოლო K' სისტემა მოძრაობდეს x და x' ღერძების გასწვრივ, მაშინ y და z კოორდინატებისთვის გვექნება $y=y'$ და $z=z'$, ხოლო x და x' განსხვავდება ერთმანეთისაგან იმ მანძილით რომელსაც გაივლის K' სისტემა K სისტემის მიმართ. თუ დროის ათვლას დავიწყებთ იმ მომენტში, როცა ორივე საკოორდინატო სისტემა ერთმანეთს ემთხვევა და K' სისტემის სიჩქარე K სისტემის მიმართ არის V, მაშინ გავლილი მანძილი იქნება Vt. მიტომ

$$x = x' + Vt \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t' \tag{1}$$

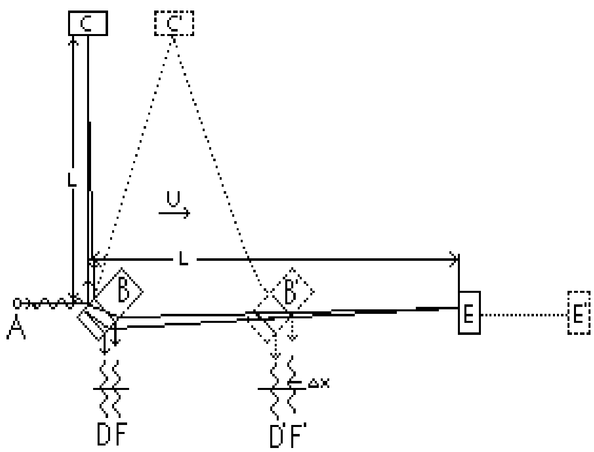
საიდანაც გამომდინარეობს *სიჩქარეთა შეკრების კანონი* თუ გავადიფერენციროთ პირველ გამოსახულებას დროით

$$U = U' + V \tag{2}$$

აქ U - მოძრავი ობიექტის სიჩქარეა K სისტემის მიმართ, U' - სიჩქარე K' სისტემის მიმართ.

როგორც აღმოჩნდა სიჩქარეთა შეკრების კანონი (2) არ არის აბსოლუტური, ის სრულდება მხოლოდ მიახლოებით, კერძოდ როცა ეს სიჩქარეები მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით. ამის პირდაპირი დასტური გამომდინარეობს მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტებიდან რომლებიც განხორციელდა 1881-87 წლებში.

ბ) *მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტი.*



გვაქვს ექსპერიმენტული დანადგარი, სადაც A – სინათლის წყაროა, B - ნახევრად გამჭვირვალე მოვერცხლილი ფირფიტა, C და E – სარკეები, რომლებიც იმყოფებიან B–სგან ერთ და იგივე მანძილზე L. მთელი მოწყობილობა ხისტადაა დამაგრებული მძიმე ფილაზე. B ფირფიტა შლის სინათლის სხივს ორად; თითოეული სხივი მიდის სარკემდე და უბრუნდება ფირფიტას. სხივის B ფირიფიტაში გავლის შემდეგ კვლავ ხდება სხივების ზედდება. თუ B-დან E-მდე და უკან მანძილის გავლას სინათლის სხივი უნდება იგივე დროს რაც საჭიროა BC და უკან მანძილის გავლას, მაშინ D-ს და F-ის ფაზები თანხვდება და ტალღები ერთმანეთს აძლიერებს. თუ ეს დროები არ არის ტოლი, ნაკადებში გვექნება ფაზათა სხვაობა და ადგილი ექნება ინტერფერენციას.

მაიკელსონმა და მორლიმ თავისი მოწყობილობა განალაგეს ისე, რომ ის პარალელური ყოფილიყო დედამიწის ორბიტაზე მოძრაობისა. მართლაც, თუ დანადგარი მოძრაობს დედამიწასთან ერთად u სიჩქარით ზოგადად მოსალოდნელია რომ ადგილი ექნება სხივების ინტერფერენციას. ვთქვათ BE-ს გავლის დრო არის t_1, EB-სი კი t_2. E-მდე მისვლისათვის საჭირო დროის განმავლობაში სისტემა გადაადგილდება ut_1 მანძილით და სინათლეს მოუწევს $L+ut_1$ მანძილის გავლა.

$$ct_1 = L + ut_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{L}{c-u}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება t_2-იც. ამ დროის განმავლობაში ფირფიტა ახლოვდება ut_2 მანძილით. სინათლე გაივლის $L-ut_2$ მანძილს, ანუ

$$ct_2 = L - ut_2 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{L}{c+u}$$

შესაბამისად საერთო დრო იქნება

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2-u^2} = \frac{2L/c}{1-u^2/c^2} \tag{3}$$

ახლა განვსაზღვროთ ის დრო t_3 რომელსაც სინათლე მოანდომებს BC მანძილის გავლას, ანუ პერპენდიკულარულად დედამიწის მოძრაობის მიმართ

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

უკან დაბრუნებისას სინათლე გადის იგივე მანძილს (რაც ნათლად ჩანს ნახაზის სიმეტრიულობიდან). საბოლოოდ ვღებულობთ

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L / c}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \tag{4}$$

მიღებული (3) და (4) გამოსახულებების შედარებისას ვხედავთ, რომ მნიშვნელები განსხვავებულია. აქედან გამომდინარე ვაკეთებთ დასკვნას, რომ თუ ჩვენი შეფასებები (3) და (4) დამყარებული გალილეის სიჩქარეთა შეკრების კანონზე (2) სწორია მაშიმ უნდა ველოდოთ (ზოგადად L მანძილზე დამოკიდებულ) ინტერფერენციას BE’B’ და BC’B’ სხივებს შორის. მაგრამ ამაოდ, ასეთი ინტერფერენცია დამზერილი არ ყოფილა, რაც ნიშნავს რომ დროებში (3) და (4) განსხვავება არ არის, ანუ $2t_3 = t_1 + t_2$.

3. მინკოვსკის სივრცე-დრო.

ა) *სინათლის სიჩქარის უნივერსალობა*.

მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტიდან და მისი შემდგომი გაუმჯობესებული ვარიანტებიდან გამომდინარეობს *სპეციალური ფარდობითობის პრინციპი*, რომლის თანახმად, ყოველ ინერციულ ათვლის სისტემაში სინათლის გავრცელების სიჩქარე უნივერსალურია, ანუ ერთნაირია ყველა მიმართულებით (იზოტროპიულობა) და მისი რიცხვითი მნიშვნელობა ვაკუუმში არის $c = 2.997925 \cdot 10^{10}$ სმ/წმ

ბ) *ლორენცის გარდაქმნები.*

ჩვენი მიზანია მოიძებნოს ისეთი გარდაქმნა, რომ ძველი კოორდინატები (x,t) გამოისახებოდეს ახალი კოორდინატების (x',t') წრფივი კომბინაციით.

განვიხილოთ $K(x,t)$ და $K'(x',t')$ სისტემები

$$\begin{aligned} x &= ax' + bt' \\ t &= a'x' + b't' \end{aligned} \qquad (5)$$

და მივიღოთ, რომ K' მოძრაობს K–ს მიმართ v სიჩქარით. უფრო მოსახერხებელია კოორდინატების (5) განზომილებების გათვალისწინებით ეს გარდაქმნები ასე ჩავწეროთ:

$$x = \frac{x' + \alpha v t'}{\gamma} \quad , \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}\alpha' x'}{\gamma'} \qquad (5')$$

სადაც $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$ უგანზომილებო სიდიდეებია. მათი მნიშვნელობების დასადგენად შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი პირობები:

(i) $x=0$ წერტილის (K-სისტემა) კოორდინატა დანახული K'-სისტემიდან გვაძლევს

$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x' = -\alpha v t' \qquad \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

რადგან ამ კოორდინატისთვის უნდა იყოს $x' = -vt'$;

(ii) $x'=0$ წერტილის (K'-სისტემა) კოორდინატა დანახული K-სისტემიდან გვაძლევს

$$x' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\alpha}{\gamma} vt' \qquad , \qquad t = \frac{t'}{\gamma'}$$

საიდანაც

$$x = \frac{\alpha}{\gamma}\gamma' vt$$

და რადგან ამ კოორდინატისთვის უნდა იყოს $x = vt$ ვღებულობთ

$$\alpha\frac{\gamma'}{\gamma} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\gamma' = \gamma}$$

(iii) სინათლის სიჩქარის უნივერსალურობა – სინათლის სიჩქარე K და K' სისტემაში უნდა იყოს ერთი და იგივე. მართლაც, თუ კოორდინატები x და x' არწერენ სინათლის მოძრაობას მაშინ სიჩქარეებისათვის c და c' უნდა მივიღოთ

$$\frac{dx}{dt} = c \quad , \quad \frac{dx'}{dt'} = c', \qquad c = c' \quad .$$

ანუ თუ გამოვიყენებთ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\frac{dt'}{dt} \qquad , \qquad \frac{dx}{dt'} = \frac{c+v}{\gamma} \qquad , \qquad \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\alpha' c\right)\frac{1}{1 - \alpha' v^2 / c^2}$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{c+v}{\gamma}\gamma\frac{1 - \frac{v}{c^2}\alpha' c}{1 - \frac{\alpha' v^2}{c^2}} = \frac{(c+v)\left(1 - \frac{v}{c}\alpha'\right)}{1 - \frac{\alpha' v^2}{c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha' = 1}$$

ამრიგად **(i-iii)** პირობების დადების შემდეგ ჩვენ გარდაქმნებს აქვთ სახე:

$$x = \frac{x' + vt'}{\gamma} \qquad\qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\gamma}$$

ასე რომ განსასაზღვრავი დაგვრჩა მხოლოდ γ .

(iv) ახლა K და K' სისტემები დავამთხვიოთ ერთმანეთს და როცა K' სისტემა დაიწყებს მოძრაობას, კოორდინატთა საერთო სათავიდან მოძრაობის მიმართულებით გაუშვათ სინათლის სხივი. K სისტემაში სხივი გაივლის ct მანძილს $(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ხოლო K' სისტემაში სხივი გაივლის ct' მანძილს $(ct')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ (ფარდობითობის პრინციპის თანახმად $c = c'$). ამიტომ შეიძლება დავწეროთ

$$c^2t^2 - x \quad - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

ავღნიშნოთ, რომ ამ განტოლების ორივე მხარე თავისთავად უდრის ნულს იმის გამო რომ წარმოადგენს სინათლის ფრონტის განტოლებას K და K' სისტემაში, შესაბამისად. რადგანაც ვიხილავთ მოძრაობას X და X' ღერძების გასწვრივ ($y = y',\ z = z'$) რაც ნიშნავს რომ

$$c^2t'^2 - x'^2 = \frac{c^2}{\gamma^2}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)^2 - \frac{1}{\gamma^2}\left(x' + vt'\right)^2$$

$$c^2t'^2 - x'^2 = \frac{1}{\gamma^2}\left(c^2t'^2 - x'^2\right)\left(1 - v^2/c^2\right)$$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \; .$$

ამრიგად საბოლოოდ, *(1+1) ლორენცის გარდაქმნებს ექნებათ სახე*:

$$\boxed{x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \tag{6}$$

გ) *ლორენცის შემოკლება.*

ახლა დაუშვათ K სისტემაში X ღერძის პარალელურად უძრავადაა მოთავსებული l_0 სიგრძის ღერო. ვიპოვოთ ამ ღეროს სიგრძე K' სისტემაში. ამისათვის ვიპოვოთ ღეროს ორივე ბოლოს კოორდინატები x_1' და x_2' დროის ერთსა და იგივე t' მომენტში.

$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad\qquad x_2 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

მაშინ ღეროს სიგრძე K' სისტემაში იქნება

$$l = \Delta x' = x_2' - x_1' \qquad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{7}$$

მიღებულ შედეგს *ლორენცის შემოკლება* ეწოდება. რადგანაც სხეულის განივი ზომები არ იცვლება მისი მოძრაობის დროს, ამიტომ სხეულის მოცულობა მცირდება სიგრძის მსგავსად

$$\boxed{V = V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{7'}$$

დ) *ლორენც-გარდაქმნები სიჩქარისათვის.*

ვიპოვოთ გამოსახულება რომელიც აკავშირებს მოძრავი მატერიალური წერტილის სიჩქარეს ერთ ათვლის სისტემაში იმავე წერტილის სიჩქარესთან სხვა სისტემაში.

ვთქვათ v არის K' სისტემის K–ს მიმართ მოძრაობის სიჩქარე. ლორენცის გარდაქმნების ფორმულებიდან (6) პირველი სამი გამოსახულება გავყოთ მეოთხეზე,

მივიღებთ *ლორენც-გარდაქმნებს სიჩქარისათვის* (ან, რაც უფრო ადექვატურია, გამოვიყენოთ დიფერენცირების ტოლობა $dx'/dt'=(dx'/dt)(dt'/dt)^{-1}$). მივიღებთ:

$$v_x=\frac{v_x'+v}{1+\frac{v_x'v}{c^2}}\qquad v_y=\frac{v_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x'v}{c^2}}\qquad v_z=\frac{v_z'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x'v}{c^2}}\tag{8}$$

ე) *ლორენცის გარდაქმნების გეომეტრიული და ფიზიკური შინაარსი*.

(**i**) ჩვენ ვიმუშავებთ ერთეულთა სისტემაში, სადაც $c=1$. ამ სისტემაში ლორენცის გარდაქმნებს აქვთ სახე

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\qquad t'=\frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}$$

საიდანაც ადვილად დასანახია რომ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2-\left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2=1$$

მიტომ

$$ch^2\omega-sh^2\omega=1\tag{9}$$

ანუ ლორენცის გარდაქმნები xt-სიბრტყეში შეესაბამება ბრუნვას წარმოსახვითი კუთხეებით (ანუ ე.წ. ‘‘ბუსტს’’)

$$ch\omega=\cos(i\omega)\qquad sh\omega=\sin(i\omega)\ .$$

ზოგადად, როცა სხვა სივრცული კოორდინატებიც (y, z) გარდაიქმნებიან, ჩვენ გვაქვს სამი ბრუნვა (xy-, xz-, yz-სიბრტყეებში) და სამი ბუსტი (xt-, yt-, zt-სიბრტყეებში).

(ii) კიდევ ერთხელ დავაკვირდეთ ამ გარდაქმნების ფიზიკურ არსს ხდომილებათა ენაზე. დავუშვათ, პირველი ხდომილება მდგომარეობს იმაში, რომ წერტილიდან, რომლის კოორდინატებია $\{x_1, y_1, z_1, t_1\}$ K სისტემაში, იწყებს გავრცელებას სიგნალი სინათლის სიჩქარით c. მეორე ხდომილება კი მდგომარეობს იმაში, რომ ეს სიგნალი მოდის წერტილში კოორდინატებით $\{x_2, y_2, z_2, t_2\}$ ამავე სიტემაში. რადგანაც სიგნალი ვრცელდება სინათლის სიჩქარით, მის მიერ გავლილი მანძილი არის $c(t_2 - t_1)$, მეორეს მხრივ იგივე მანძილი შეიძლება ასეც ჩაიწეროს

$$\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2}.$$

ამიტომ

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

იგივე ორ ხდომილებას შეიძლება დავაკვირდეთ K' სისტემიდანაც. შესაბამისი კოორდინატები იქნება $\{x_1', y_1', z_1', t_1')$ და $\{x_2', y_2', z_2', t_2'\}$, მაშინ

$$\left(x_2' - x_1'\right)^2 + \left(y_2' - y_1'\right)^2 + \left(z_2' - z_1'\right)^2 - c^2\left(t_2' - t_1'\right)^2 = 0.$$

სიდიდეს

$$S_{12} = \left[c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2}$$

ეწოდება *ინტერვალი* ორ ხდომილებას შორის. თუ ინტერვალი ორ ხდომილებას შორის ნულის ტოლია ერთ სისტემაში, მაშინ იგი ნულის ტოლი იქნება ნებისმიერ სხვა სისტემაშიც.

ორი უსასრულოდ ახლო ხდომილებისათვის ინტერვალი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{10}$$

სხვადასხვა ათვლის სისტემაში ერთი და იგივე ხდომილების ორი ds და ds' ინტერვალი ერთი რიგის უსასრულოდ მცირეებია. ამიტომ $ds^2 = ads'^2$, სადაც a კოეფიციენტი შეიძლება იყოს დამოკიდებული მხოლოდ ამ ორი ინერციული სისტემის ფარდობითი სიჩქარის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე. იგი ვერ იქნება

კოორდინატებზე დამოკიდებული, რადგანაც მაშინ დრო-სივრცის სხვადასხვა წერტილები იქნებოდა არატოლფასი, რაც ეწინააღმდეგება დრო-სივრცის ერთგვაროვნებას. იგი ვერ იქნება დამოკიდებული ფარდობითი სიჩქარის მიმართულებაზეც, რადგანაც ეს შეეწინააღმდეგებოდა სივრცის იზოტროპიულობას.

განვიხილოთ სამი ათვლის სისტემა K, K_1, K_2 და ვთქვათ V_1 და V_2 არის K_1 და K_2 სისტემების მოძრაობის სიჩქარე K–ს მიმართ. მაშინ ამ სისტემებში შესაბამისად გვექნება

$$ds^2 = a(V_1)ds_1^2 \qquad ds^2 = a(V_2)ds_2^2 \qquad ds_1^2 = a(V_{12})ds_2^2$$

სადაც V_{12} არის K_2 სისტემის K_1 -ის მიმართ მოძრაობის სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობაა. ამ გამოსახულებების შედარებს გვაძლევს $a(V_2)/a(V_1) = a(V_{12})$. მაგრამ V_{12}, განმარტებისამებრ, სრულებით დამოკიდებულია V_1 და V_2. ამიტომ $a(V)$ ზოგადად უნდა იყოს მუდმივა და ერთდათერთი შემთხვევა, როც a-კოეფიციენტებს შორის შეიძლება იყოს ზემოთ მოყვანილი კავშირი არის როცა ეს მუდმივა 1-ის ტოლია. ესეიგი $ds^2 = ds'^2$ და, აქედან, სასრული ინტერვალებიც ერთმანეთის ტოლია $S=S'$.

ხდომილებებს შორის ინტერვალი ერთნაირია ყველა ათვლის ინერციულ სისტემაში, ე.ი. ინტერვალი ინვარიანტია. თუ $S_{12}^2 > 0$, მაშინ ინტერვალი ნამდვილი სიდიდეა და მას *დროისმაგვარს* უწოდებენ. თუ ორ ხდომილებას შორის ინტერვალი დროისმაგვარია, არსებობს ისეთი ათვლის სისტემა რომელშიც ორივე ხდომილება ხდება ერთსა და იგივე ადგილას. დრო რომელიც გაივლის ამ ხდომილებებს შორის აღნიშნულ სისტემაში არის

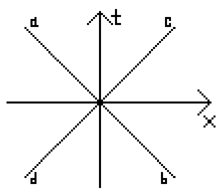
$$t_{12}' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c} \quad . \tag{11}$$

თუ $S_{12}^2 < 0$, ინტერვალი წარმოსახვითია და მას *სივრცისმაგვარს* უწოდებენ. ინტერვალი ორ ხდომილებას შორის სივრცისმაგვარია, არსებობს ისეთი ათვლის სისტემა, რომელშიც ორი ხდომილება ხდება ერთდროულად. მანძილი მოცემული ორი ხდომილების მოხდენის წერტილებს შორის აღნიშნულ სისტემაში არის

$$l_{12}' = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i s_{12} \tag{11'}$$

ინტერვალის თვისება იყოს დროის- ან სივრცის- მაგვარი არ არის დამოკიდებული ათვლის სისტემის არჩევაზე და ამრიგად არის აბსოლუტური.

(**iii**) დავუშვათ, **ხ**დომილებას აქვს ადგილი კოორდინატთა სათავეში *(1+1)*-განზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში *x, t* (*y, z* კოორდინატებს ჯერჯერობით არ ვი**ხ**ილავთ). {*x=0* , *t=0*} წერტილში გამავალი ნაწილაკის თანაბარი და სწორ**ხ**აზოვანი მოძრაობა გამოისა**ხ**ება წერტილზე გამავალი წრფით, რომლის *t* ღერძისადმი და**ხ**რის კუთ**ხ**ის ტანგენსი უდრის ნაწილაკის სიჩქარეს. რადგანაც უდიდესი შესაძლო სიჩქარეა სინათლის სიჩქარე *c*, შესაბამისად არსებობს უდიდესი კუთ**ხ**ეც.



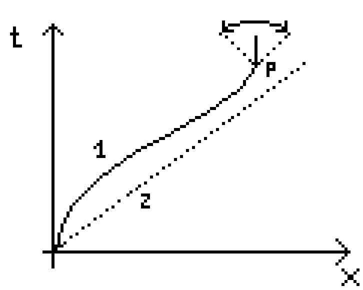
ნაწილაკის მოძრაობის აღმწერი წრფეები შეიძლება იყოს მოთავსებული *aOc* და *bOd* არეების შიგნით. *aOc* არეში ინტერვალი დროის მაგვარია $c^2t^2 - x^2 > 0$, ე.ი. ყველა ათვლის სისტემაში aOc არეში მომ**ხ**დარი ყველა მოვლენა მომავალია O–ს მიმართ (t >0),. ამიტომ aOc არის ''აბსოლუტურ მომავალს'' უწოდებენ. ანალოგიურად bOd არეს უწოდებენ ''აბსოლუტურ წარსულს''.

aOd და cOb არეები შეესაბამება სივრცის მაგვარ ინტერვალებს. რადგანაც ორი მოვლენა შეიძლება იყოს მიზეზობრივად დაკავშირებული ერთმანეთთან მ**ხ**ოლოდ დროის მაგვარი ინტერვალის შემთ**ხ**ვევაში, ამიტომ ეს არეები არ შეესატყვისება რეალურ პროცესებს, ან ს**ხ**ვანაირად ვერც ერთი ურთიერთქმედება ვერ გავრცელდება სინათლის სიჩქარეზე მეტი სიჩქარით.

თუ განვი**ხ**ილავთ სამივე სივრცით კოორდინატს გვექნება კონუსი ოთ**ხ**განზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში ($x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$), რომლის ღერძიც ემთ**ხ**ვევა t ღერძს. ამ კონუსს *სინათლის კონუსი* ეწოდება.

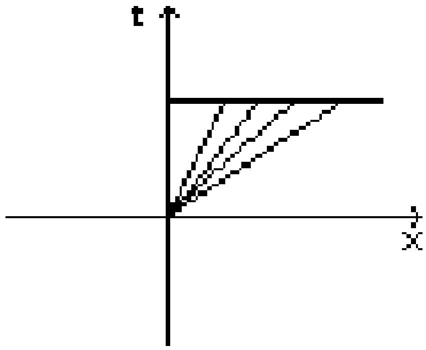
გ) *<u>დრო-სივრცის დიაგრამები</u>*.

სივრცე-დროის დიაგრამებს ს**ხ**ვანაირად მინკოვსკის დიაგრამებს უწოდებენ. მოსა**ხ**ერ**ხ**ებელია მოვლენები გამოისა**ხ**ოს დრო-სივრცის დიაგრამებით, სადაც ჰორიზონტალურ ღერძზე გამოსა**ხ**ულია მდებარეობა სივრცეში, **ხ**ოლო ვერტიკალურზე - მოვლენის დრო.



განვი**ხ**ილოთ კერძო მაგალითები. ნა**ხ**აზზე 1 - ნაწილაკის ე.წ. მსოფლიო წირია, 2 - სინათლის ს**ხ**ივის მსოფლიო წირი. ამ დიაგრამის თანა**ხ**მად *t=0* მომენტში ნაწილაკი იმყოფება კოორდინატთა სათავეში, შემდეგ კი მოძრაობს x ღერძის გასწვრივ. დრო-სივრცის დიაგრამაზე სივრცეში მდებარეობის დროზე დამოკიდებულების ასეთ გრაფიკს ეწოდება ნაწილაკის მსოფლიო წირი. რადგანაც ნაწილაკი არ

შეიძლება მოძრაობდეს სინათლის სიჩქარეზე მეტი სიჩქარით, ეს ნიშნავს რომ *ნაწილაკის მსოფლიო წირი ყოველთვის დროისმაგვარი. სინათლის სხივის მსოფლიო წირი* კი, როგოც ამბობენ, *სინათლის მაგვარია.*



განვიხილოთ შედარებისთვის სივრცე-დროის დიაგრამები გალილეის სივრცისათვის, სადაც $x=vt$. თუ ავიღებთ ერთსა და იმავე ნაწილაკს რომელიც მოძრაობს სხვადასხვა სიჩქარით (ნოლიდან უსასრულობამდე სხვადასხვა ათვლის სისტემის მიმართ), მაშინ დროის ერთი მომენტის შესაბამისი (t) მსოფლიო წირის ყველა წერტილი განლაგდება x ღერძის პარალელურ წრფეზე.

ე) *<u>რა უნდა გვახსოვდეს კარგად.</u>*

გალილეის სივრცე-დრო (დამოუკიდებელი სივრცისა და დროის ინტერვალები)

2 ინტერვალი : $(x)^2 + (y)^2 + (z)^2 = R^2$, $t' - t = 0$

ფარდობითი სივრცე და აბსოლუტური დრო

vs

მინკოვსკის სივრცე-დრო (ერთიანი დრო-სივრცის ინტერვალი)

1 ინტერვალი : $(x)^2 + (y)^2 + (z)^2 + (ict)^2 = I^2$ ($t' - t = O(v^2/c^2)$)

ფარდობითი სივრცე და ფარდობითი დრო

ე) *<u>სინათლის სიჩქარე და სივრცე-დრო.</u>*

ალბათ შეიძლება გაჩნდეს ერთგვარი კითხვა: რატომ მოხდა ისე რომ სინათლის სიჩქარე იჩენს თავს ისეთ წმინდა გეომეტრიულ საკითხებში როგორიცაა სივრცე-დროის სტრუქტურა სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში, ან კოორდინატების გარდაქმნა ერთი ინერციული სისტემიდან გადასვლისას მეორეში და ასე შემდეგ. ვინმემ შეიძლება იხუმროს კიდეც რომ ეს იმიტომაა რომ მაიკელსონი და მორლი მუშაობდნენ სინათლის სხივთან თავის ცნობილ ექსპერიმენტში. მართლაც, საინტერესოა გავიგოთ რით არის გამორჩეული სინათლის სხივი, ანუ ფოტონების ნაკადი, სხვა შესაძლო ნაწილაკების ნაკადებთან - ვთქვათ, სწრაფი ნეიტრინოების

ან ელექტრონების ნაკადთან, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია (პრინციპულად თუ არა ტექნიკურად) მზგავსი ექსპერიმენტების ჩატარება.

ძირითადი მიზეზი ამ გამორჩეულობისა დაკავშირებულია იმასთან როგორ განვიხილავთ თავისუფლად მოძრავი ნაწილაკის მასას – როგორც რაიმე კონსტანტას, როგორც ეს ხდება ნიუტონის მექანიკაში (NM), თუ როგორც დინამიურ ცვლადს, როგორც ამას აქვს ადგილი აინშტაინის მექანიკაში (EM)

$$m = E/c^2 \tag{12}$$

სადაც ამ ფორმით $(1/c^2)$ დაწერილი პროპორციულობის კოეფიციენტი მასასა და ენერგიას შორის აღებულია მხოლოდ განზომილების მოსაზრებით და c-ს ჯერ სინათლის სიჩქარის მნიშვნელობა არ ენიჭება.

მაგრამ განურჩევლად იმისა ვიმყოფებით ჩვენ ნიუტონის თუ აინშტაინის მექანიკაში ენერგიის ცვლილება დროის ერთეულში უნდა იყოს ერთი და იგივე, ანუ

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{NM} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_{EM} \tag{13}$$

რადგან ორივე თეორიაში ენერგია დინამიური ცვლადია დაკავშირებული დროის ერთგავაროვნებასთან. ზემოთ მოყვანილ მასის განმარტებიდან (12) აინშტაინის მექანიკაში და, შესაბამისად, კინეტიკური ენერგიის განსაზღვრიდან ნიუტონის მექანიკაში, $E = mv^2/2$, გვაქვს თანახმად (13)-სა დიფერენციალური განტოლება

$$c^2\frac{dm^2}{d(mt)} = \frac{d(m^2v^2)}{d(mt)} \quad .$$

ამ განტოლების ინტეგრირების შედეგად ვღებულობთ

$$m^2c^2 = m^2v^2 + C$$

სადაც ინტეგრირების კონსტანტა შეიძლება დადგინდეს ნაწილაკის საკუთარი (უძრავი) სისტემაში გადასვლით: $C = m_0^2c^2$ (m_0^2 - უძრავი ნაწილაკის მასაა, $v = 0$). ასე რომ საბოლოოდ ვღებულობთ

$$m^2 = \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2} \tag{14}$$

საიდანას გამომდინარეობს რამდენიმე მნიშვნელოვანი დასკვნა:

(**i**) ნაწილაკის სიჩქარე v ყოველთვის ნაკლებია სიდიდე c-ზე, რომელიც გაჩნდა პროპორციულობის კოეფიციენტიდან მასასა და ენერგიას შორის (იხ. (12));

(**ii**) რომ არ გვქონდეს ნულოვანი ენერგია უმასო ნაწილაკებისთვის აუცილებელია მივიღოთ რომ ამ ნაწილაკებს ყოველთვის გააჩნიათ მხოლოდ მაქსიმალური სიჩქარე $v = c$;

(**iii**) ნიუტონის მექანიკა გადადის აინშტაინის რელატივისტურ მექანიკაში თუ ნაწილაკის მასას განვიხილავთ თანახმად განტოლებისა (14) როცა ერთი ინერციული სისტემიდან გადავდივართ მეორეში, რომელიც პირველის მიმართ მოძრაობს v სიჩქარით

$$m' = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad . \tag{15}$$

ავღნიშნოთ რომ ჩვენ აქ ვსაუბრობთ მოძრავ მასაზე $m(v)$, რომელიც იცვლება სისტემიდან სისტემაზე გადასვლისას და, არა უძრავ მასაზე m_0 რომელიც ჭეშმარიტი ლორენც-ინარიანტია, $E^2 - p^2 = m_0^2$).

გამომდინარე ამ დასკვნებიდან გასაგებია რომ ზოგადად c ნიშნავს მაქსიმალურ სიჩქარეს რომელსაც ჩვენ მივაწერთ ყველა უმასო ნაწილაკს. ფოტონი უბრალოდ ერთერთი მათგანია. ამიტომ მისი ექსპერიმენტულად გაზომილი სიჩქარე $c = 2.997925 \cdot 10^{10}$ სმ/წმ ამგვარადვე ახასიათებს ყველა უმასო ნაწილაკს – გრავიტონს, ნიეტრინოს და ა.შ. სწორედ ამ მიზეზის გამო ეს სიჩქარე სპეციალური ფარდობითობის თეორიის უნივერსალური პარამეტრია.

4. აინშტაინის სივრცე-დრო.

ა) *გრავიტაციული და ინერციული მასების ექვივალენტობა*.

სხეულთა ინერტულობის ზომას ინერციული მასა ეწოდება

$$M_{In} = F / a$$

გრავიტაციული ურთიერთქმედების მუხტს გრავიტაციული მასა ეწოდება

$$M_{Gr} = \frac{Fr^2}{GM*}$$

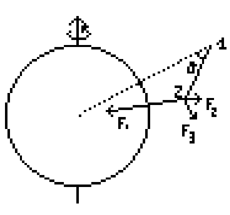
სადაც ამ სხეულზე მომქმედი გრავიტაციული ძალის ცენტრი ასახული მასაში $M*$, რომელიც ჩვენს პირობებში ბუნებრივად გაიგივებულია დედამიწის მასასთან.

ექვივალენტობის სუსტი პრინციპი: გრავიტაციული და ინერციული მასები ერთმანეთის ტოლია, ანუ

$$M_{In} = M_{Gr} \quad .$$

ბ) *ეტვეშის ექსპერიმენტები*.

(i) 1889 წელს ეტვეშმა დაიწყო ექვივალენტობის სუსტი პრინციპის შემოწმებისათვის ექსპერიმენტების ჩატარება, რომლებიც 25 წელი გაგრძელდა.



ექსპერიმენტი სქემატურათ გამოიყურება შემდეგნაირად: მბრუნავი წრეწირი არის დედამიწა რადიუსით Re, 1 - ქანქარის დაკიდების წერტილი, 2 - ქანქარის ბურთულა; F_1 - სიმძიმის ძალა, F_2 - ცენტრიდანული ძალა, F_3 - ცენტრალური ძალის ჰორიზონტალური მდგენელი. ქანქარა ჩამოკიდებულია დედამიწის 45 განედზე. $F_1 = M_{Gr}g$ (მიმართულია ცენტრისაკენ), $F_2 = M_{In}\omega^2 R_e \cos 45^0 = M_{In}\omega^2 R_e / \sqrt{2}\ M_{In}\omega^2 R_e$ და მიმართულია ბრუნვის ღერძის მართობულად. ამ ორი ძალის ტოლქმედი ქმნის ϑ კუთხეს

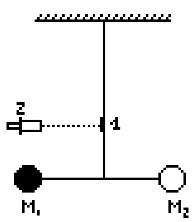
$$\vartheta = \frac{M_{In}\omega^2 R_e / 2}{M_{Gr}g - M_{In}\omega^2 R_e / 2}$$

და რადგანაც F_2 შედარებით მცირეა ამ კუთხის მნიშვნელობა მიახლოვებით არის

$$\vartheta \approx \frac{M_{In}\omega^2 R_e}{2M_{Gr}\,g} \quad .$$

გამომდინარე იქიდან რომ ეს კუთხე შეიცავს ინერტული და გრავიტაციული მასების შეფარდებას (და დანარჩენი შემავალი პარამეტრები ცნობილია) მისი ზუსტი გაზომვის შედეგად შეიძლება შემოწმდეს ექვივალენტობის სუსტი პრინციპის სამართლიანობა.

(ii) ახლა, ვთქვათ, საკიდი შედგება ორი ბურთულისაგან, რომლებიც სხვადასხვა მასალისგანაა დამზადებული, მაგრამ მათი გრავიტაციული მასები შერჩეული ისე რომ $M_{Gr}(1) = M_{Gr}(2)$.



1 - სარკე.

2 – დამკვირვებლის ჭოგრი.

თუ ახლა $M_{In}(1) \neq M_{In}(2)$, მაშინ ძაფი დაეხვევა. გაზომვას იმეორებენ ხელსაწყოს 180 -ზე მოტრიალების შემდეგ, რითიც განსაზღვრავენ სასწორის ნულოვან მდგომარეობას. ეტვეშმა მოახდინა რვა სხვადასხვა ლითონის ეტალონად მიღებულ პლატინასთან (Pt) შედარება და დაადგინა, რომ

$$M_{In}(l)/M_{Gr}(l) = M_{In}(Pt)/M_{Gr}(Pt)$$

$(l = 1, \ldots 8)$ ფარდობითი ცდომილებით 10^{-8}.

გ) *ექვივალენტობის ძლიერი პრინციპი.*

გრავიტაციულ ველს გააჩნია შემდეგი ძირითადი თვისება: ყველა სხეული მათი მასების მიუხედავად განსაზღვრული საწყისი პირობებისას ერთნაირად მოძრაობს.

ათვლის ინერციულ სისტემაში ყველა სხეულის თავისუფალი მოძრაობა ხდება სწორხაზოვნად და თანაბრად და თუ დროის საწყის მომენტში მათი სიჩქარეები ერთნაირი იყო, მაშინ ისინი ერთნაირი დარჩება მთელი დროის განმავლობაში. ამიტომ თუ განვიხილავთ ამ მოძრაობას მოცემულ არაინერციულ სისტემაში, მაშინ მის მიმართ ყველა სხეული იმოძრავებს ერთნაირად.

ამრიგად, ათვლის არაინერციული სისტემა ექვივალენტურია გრავიტაციული ველისა. ამ ჰიპოტეზას *ექვივალენტობის ძლიერი პრინციპი* ეწოდება.

ერთერთ ძირითადი შედეგი ამ პრინციპისა არის ის რომ *გრავიტაცია არის გეომეტრია*, ანუ ყოველთვის შეიძლება ისეთი დრო-სივრცის გეომეტრიის არჩევა რომ სხეულის მოძრაობა მის ნებისმიერ ლოკალურ არეში შეიძლება იქნას განხილული როგორც სწორხაზოვნი და თანაბარი, თუმცა ზოგადად ეს დრო-სივრცე მრუდეა.

ამოცანები.

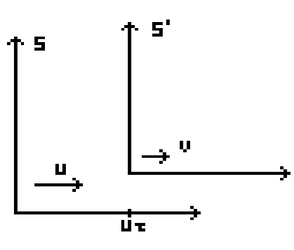
1. S სისტემაში მოცემულია სხეული, რომლის სიგრძეა $l_0\left(0, x_0\right)$. იპოვეთ მისი კოორდინატები S' სისტემაში. (S' სისტემა S სისტემის მიმართ მოძრაობს $\vec{v}$ სიჩქარით).

2. მოცემულია R რადიუსიანი ხისტი ბორბალი, რომელიც ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით. როგორი იქნება ბორბლის რადიუსი R' სხვა ინერციულ სისტემაში რომელიც რაღაც v სიჩქარით მოძრაობს ამ სისტემის მიმართ? განსაზღვრეთ ბორბლის რადიუსი R' არაინერციულ ათვლის სისტემაშიც – თუ არსებობს არაინერციული სისტემა, რომელიც იძლევა ზუსტ პასუხს ამ კითხვაზე?

3. იპოვეთ კავშირი მოძრავი სხეულის საკუთარ დროსა და ლაბორატორულ (უძრავი სისტემის) დროს შორის.

4. მოცემულია სივრცე-დროის დიაგრამების პარაბოლათა სისტემა $x = a + bt + t^2$. მოძებნეთ ისეთი გარდაქმნები, რომელიც გადაიყვანს ამ პარაბოლებს წრფეებში.

5.



ვთქვათ u სიჩქარით ვრცელდება სიგნალი. დროის რაღაც τ მომენტში იგი აღწევს $u\tau$ წერტილს. დაამტკიცეთ, რომ თუ $u > c^2/v$, მაშინ S'-ის თვალსაზრისით სიგნალი $u\tau$ წერტილში მივა უფრო ადრე ვიდრე გამოსხივდება.

II. სივრცე-დრო: მათემატიკური აღწერა.

1. შესავალი.

თუ სივრცეში შემოყვანილია დეკარტეს კოორდინატები და P წერტილს შეესაბამება კოორდინატები $\left(x^1, x^2, x^3\right)$, Q წერტილს - $\left(y^1, y^2, y^3\right)$ და სწორხაზოვანი მონაკვეთის სიგრძის კვადრატი არის

$$l^2 = \left(x^1 - y^1\right)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 + \left(x^3 - y^3\right)^2 \qquad (1)$$

მაშინ სივრცეს ევკლიდური ეწოდება, ხოლო ასეთი თვისებების მქონე დეკარტეს კოორდინატებს - ევკლიდეს კოორდინატები.

ევკლიდურ სივრცეში ან მის არეებში ამოცანების ამოხსნისას ჩვენ ხშირად იძულებულნი ვართ შევცვალოთ კოორდინატები და თვალყური ვადევნოთ ამა თუ იმ სიდიდეთა გარდაქმნის კანონებს. გარდა ამისა, ხშირად მოსახერხებელია სივრცის სხვადასხვა არეში ესა თუ ის ამოცანა ამოვხსნათ სხვადასხვა კოორდინატებში და ამოხსნები შევკეროთ განსხვავებული საკოორდინატო სისტემების მოქმედების არეში.

გარდა ამისა, საკოორდინატო სისტემების გამოყენება შეიძლება არ იყოს მართებული მთელ სივრცე-დროში, არამედ მხოლოდ მის ლოკალურ უბანში. მაგალითად, 2-განზომილებიანი ევკლიდური გეომეტრია (“ბრტყელი” x და y კოორდინატებით) კარგად “იმუშავებს” თუ ჩვენ მას გამოვიყენებთ რომელიმე დასახლებული პუნქტის (ქალაქის) გეგმის შესადგენად, მაგრამ რა თქმა უნდა ის ვერ იმუშავებს თუ ჩვენ მას გამოვიყენებთ მთელი დედამიწის აღსაწერად, რადგან ეს აღწერა არ ითვალისწინებს სიმრუდეს, რომელიც გააჩნია დედამიწის სფერულ ზედაპირს.

ზოგადად, ჩვენ უნდა შევძლოს ფიზიკური კანონების ფორმულირება კონკრეტული საკოორდინატო სისტემისაგან დამოუკიდებლად. მსგავს შემთხვევებში ჩვენ იძულებულნი ვართ განვიხილოთ სივრცე როგორც მრავალნაირობა და ამ გაფართოებულ კონტექსტში გავნმარტოდ ძირითადი ოპერაციები და კანონზომიერებანი.

თანამედროვე ფიზიკური წარმოდგენები, დამყარებული სპეციალურ ან ზოგად ფარდობითობის თეორიაზე, არ უშვებენ სივრცისა და დროის გაყოფას და შესაბამისად იყენებენ 4-განზომილებიან დრო-სივრცის კონტინუუმს, რომელიც ზოგადად წარმოადგენს 4-განზომილებიან დიფერენცირებად მრავალნაირობას.

ამრიგად, თუ დამკვირვებელი იმყოფება სივრცე-დროის ნებისმიერ წერტილში, მისი გარემომცველი არე U_p უშვებს კოორდინატების $\{x_p^{\,0}, x_p^{\,1}, x_p^{\,2}, x_p^{\,3}\}$ შემოყვანას. ამასთან, სხვადასხვა დამკვირვებლების მიერ შემოღებული კოორდინატები $x_p^{\,\alpha}$ და $x_q^{\,\alpha}$ მოქმედების საერთო არეში ერთმანეთის საშუალებით გამოისახება გლუვი და შექცევადი ფუნქციებით:

$$x_p^{\,\alpha} = x_p^{\,\alpha}\left(x_q^{\,0}, \dots, x_q^{\,3}\right) \quad . \tag{2}$$

ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში დამატებით ვარაუდობენ, რომ ფიზიკური სივრცე-დრო არის მინკოვსკის სივრცე, რომელიც უშვებს ერთიანი საკოორდინატო სისტემის შემოყვანას მთელ სივრცეში და მას გააჩნია *ფსევდოევკლიდური მეტრიკა*:

$$(dl)^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}, \qquad \eta_{\alpha\beta} = diag\,(1,-1,-1,-1) \quad . \tag{3}$$

ფარდობითობის ზოგად თეორიას საფუძვლად უდევს აინშტაინის ჰიპოთეზა: სივრცე- დროს გააჩნია *ფსევდორიმანის მეტრიკა*, რომელიც თავისი ფიზიკური აზრით იდენტურია გრავიტაციული ველისა. ყოველ ლოკალურ კოორდინატთა სისტემაში (p) ამ მეტრიკას აქვს სახე გამომდინარე ინტერვალის განსაზღვრასთან ამ სისტემაში

$$(dl)^2 = g_{\alpha\beta}^{\;(p)} dx_p^{\,\alpha} dx_p^{\,\beta} \quad . \tag{4}$$

ამბობენ, რომ გრავიტაციული ველი სუსტია თუ ეს მეტრიკა მიახლოებულია ფსევდოევკლიდურ მეტრიკასთან $\eta_{\alpha\beta}$ (3):

$$g_{00} \approx 1 \;, \quad g_{\alpha\alpha} \approx -1 \;, \quad g_{\alpha\beta} \approx 0 \;\; (\alpha \neq \beta) \tag{4'}$$

ყოველივე ზემოთ ნათქვამი ნათლად მიგვითითებს ფიზიკაში ფართოდ გამოყენებადი მათემატიკური ობიექტებისა და ცნებების დაწვრილებით განხილვის აუცილებლობაზე. ამიტომაც ჯერ ჩამოვთვლით ზოგიერთ პირველად ცნებას (სიმრავლე, მრავალნაირობა, ტოპოლოგიური სივრცე და ა.შ.), მერე ზოგადად განვსაზღვრავთ რამოდენიმე ბაზისურ მათემატიკურ ობიექტს (სკალარი, ვექტორი, 1-ფორმა etc.) და შემდეგ შევეცდებით ავაგოთ სივრცე-დროის მათემატიკური მოდელი.

2. გეომეტრიული საწყისები.

ა) *სიმრავლე*.

სიმრავლე მათემატიკის საწყისი ცნებაა, რომელიც გულისხმობს რაიმე ობიექტთა ერთობლიობას. სიმრავლის მოცემა ნიშნავს ყოველი ობიექტის თვისების განსაზღვრას, რის შედეგად ვაკეთებთ დასკვნას ეკუთვნის თუ არა ეს ობიექტი მოცემულ სიმრავლეს. ობიექტებს რომლებიც ამ სიმრავლეს ეკუთვნიან სიმრავლის *ელემენტები* ეწოდებათ.

სიმრავლე *სასრულია* თუ შეიძლება მისი ელემენტების დათვლა. თუ დათვლა შეუძლებელია იგი *უსასრულოა*.

თუ სიმრავლეში არ შედის არც ერთი ელემენტი, მას *ცარიელი სიმრავლე* $\varnothing$ ეწოდება.

შემოყვანილია *სიმრავლის სიმძლავრის* ცნება. სასრული სიმრავლისათვის ეს არის ელემენტების რაოდენობა სიმრავლეში. უსასრულო სიმრავლისათვის ორ სიმრავლეს ეწოდება ტოლი სიმძლავრის თუ მათ ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ანუ *ბიექცია*.

თუ სიმრავლე ურთიერთცალსახა შესაბამისობაშია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლესთან, მას *თვლადი სიმრავლე* ეწოდება. და პირიქით, *არათვლადი სიმრავლე* არ არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლესთან; თუმცა იგი შეიძლება ურთიერთცალსახა შესაბამისობასი იყოს, მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესთან R.

A სიმრავლეს ეწოდება *ღია* თუ ყველა მისი წერტილისათვის არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ მიდამო რომ $\varepsilon \in A$. ღია სიმრავლის დამატებას ჩაკეტილი სიმრავლე ეწოდება.

A და B *სიმრავლეების გაერთიანება* ეწოდება AUB სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტი A და B–დან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის.

A და B *სიმრავლეების თანაკვეთა* ეწოდება $A \cap B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის A-საც და B-საც.

A და B *სიმრავლეების სხვაობა* A/B ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის A-ს და არ ეკუთვნის B-ს.

ვიტყვით, რომ A და B *სიმრავლეები ტოლია*, თუ A არის B-ს ქვესიმრავლე და B კი A-სი.

ვიტყვით, რომ A სიმრავლე არის B *სიმრავლის ქვესიმრავლე* $(A \subseteq B)$, თუ $x \in A$ -დან გამომდინარეობს $x \in B$.

თუ A სიმრავლე არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე $(A \subseteq B)$, მაშინ A სიმრავლის B სიმრავლემდე *დამატება* ეწოდება $B\backslash A$ სიმრავლეს.

სიმრავლის *დეკარტული კვადრატი* ეწოდება მის ელემენტთა ყველა წყვილების სიმრავლეს:

$$A^2 = A \times A = \{(a;b) / a, b \in A\}$$

A სიმრავლის B სიმრავლეზე *დეკარტულ ნამრავლს* ვუწოდებთ სიმრავლეს, რომლის ელემენტებს წარმოადგენს ყველა შესაძლო წყვილი ელემენტებისა:

$$A \times B = \{(a;b) / a \in A, b \in B\}$$

სივრცე-დროის თვისებების შესწავლისას ჩვენ განსაკუთრებით დაგვჭირდება არათვლადი და ღია სიმრავლეების ცნებები.

ბ) *ტოპოლოგიური სივრცე*.

ვთქვათ X სიმრავლეში რაიმე წესით გამოყოფილია ქვესიმრავლეთა J სისტემა, რომელსაც შემდეგი თვისებები გააჩნია:

(i) J სისტემის ელემენტების ნებისმიერი რაოდენობის გაერთიანება კვლავ J-ს ელემენტია.
(ii) J სისტემის ელემენტების სასრული რაოდენობის თანაკვეთა კვლავ J–ს ელემენტია.
(iii) $\varnothing$ ცარიელი სიმრავლე და X სიმრავლეც ეკუთვნის J-ს.

ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ X სიმრავლეზე განსაზღვრულია J ტოპოლოგია და (X, J) წყვილს *ტოპოლოგიური სივრცე* ეწოდება.

განვიხილოთ ახლა (X, J) ტოპოლოგიური სივრცის რაიმე A ქვესიმრავლე. T-თი აღვნიშნოთ J–ს ელემენტთა (U) და A–ს თანაკვეთების ერთობლიობა:

$$T = \{U \cap A / U \in J\}$$

ადვილად დასანახია რომ T სიმრავლის ელემენტები აკმაყოფილებს ტოპოლოგიური სტრუქტურის აქსიომებს (**i-iii**) და ამიტომ (A, T) ტოპოლოგიური სივრცეა. მას (X, J) *ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე* ეწოდება. ამ შემთხვევაში ვიტყვით რომ T ტოპოლოგია ინდუცირებულია A სიმრავლეზე J ტოპოლოგიით. მაგალითად, $\Re^2$ სიბრტყის ტოპოლოგია შეიძლება განვიხილოთ როგორც ქვესივრცე ინდუცირებული 3-განზომილებიანი $\Re^3$ სივრციდან.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება *ჰაუსდორფის სივრცე*, თუ ყოველი წყვილი მისი წერტილებისა შეიძლება შემოვსაზღვროთ ერთმანეთთან არაგადამკვეთი ღია სიმრავლეებით.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება *კომპაქტური*, თუ იგი დაფარულია ღია სიმრავლეების თვლადი რიცხვით.

ვამბობთ რომ ტოპოლოგიური სივრცე *წრფივად ბმულია* თუ მისი ყოველი ორი წერტილი შეიძლება შევაერთოთ უწყვეტი წირით.

ტოპოლოგიური სივრცეების მნიშვნელოვან კლასს წარმოადგენს *მეტრიკული სივრცეები.* მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი ორი x, y წერტილისათვის განსაზღვრულია მანძილი $\rho(x,y)$ ამ წერტილებს შორის და იგი აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს:

1/ $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

2/ $\rho(x,y)>0 \quad (x\neq y) \quad , \quad \rho(x,x)=0$

3/ $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (სამკუთხედის უტოლობა).

მაგალითად, n-განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე $\Re^n$ მეტრიკულია წერტილებს შორის ევკლიდეს მანძილის მიმართ.

$$x=\left(x^1,\ldots,x^n\right) \qquad y=\left(y^1,\ldots,y^n\right) \qquad \rho(x,y)=\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n}\left(x^\alpha-y^\alpha\right)^2} \qquad (5)$$

მეტრიკულ სივრცეში შემოყავთ ტოპოლოგია, რომლის ღია სიმრავლეებსაც ღია ბირთვების გაერთიანება წარმოადგენს. *ღია ბირთვი* ცენტრით x_0 წერტილში და ε რადიუსით, ეწოდება იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\rho(x_0,x)<\varepsilon$.

მინკოვსკის სივრცე მეტრიკული ტოპოლოგიური სივრცეა.

გ) *მრავალნაირობა.*

n-განზომილებიანი *დიფერენცირებადი მრავალნაირობა* ეწოდება წერტილთა ნებისმიერ სიმრავლეს, რომელშიც შემოყვანილია შემდეგი სტრუქტურა:

1/ სიმრავლე წარმოადგენს U_q არეების სასრული ან თვლადი რიცხვის გაერთიანებას.

2/ ყოველ U_q არეში შემოყვანილია x_q^α $\alpha=1..n$ ლოკალური კოორდინატები. U_q არეებს უწოდებენ საკოორდინატო მიდამოებს ან რუკებს.

ყოველი არეთა წყვილის თანაკვეთა $U_q \cap U_p$ სიმრავლეში თვითონ არის (თუ იგი არ არის ცარიელი) სივრცის არე, რომელშიც უკვე მოქმედებს ორი ლოკალური საკოორდინატო სისტემა. მოითხოვება, რომ ყოველი ლოკალური კოორდინატთა სისტემა გამოისახებოდეს მეორით დიფერენცირებადი სახით

$$x_p^{\alpha} = x_p^{\alpha}(x_q^1,\dots,x_q^n) \qquad\qquad I_{pq} = \det\left(\frac{\partial x_p^{\alpha}}{\partial x_q^{\beta}}\right) \neq 0 \qquad (6)$$
$$x_q^{\alpha} = x_q^{\alpha}(x_p^1,\dots,x_p^n)$$

$(\alpha,\beta=1\dots n)$ რასაც შეესაბამება არანულოვანი ‘‘გადასვლის’’ იაკობიანი I_{pq}.

ევკლიდეს სივრცე $\Re^n$ ან ნებისმიერი მისი არე არის მრავალნაირობის მაგალითი.

კომპლექსური სივრცე $\not\subset^n$ შეესაბამება 2^n განზომილებიან ნამდვილ სივრცეს და აგრეთვე მრავალნაირობას წარმოადგენს.

ორი მრავალნაირობების

$$M=\bigcup_q U_q\,,\quad N=\bigcup_p V_p$$

პირდაპირი ნამრავლი $M\times N$ ეწოდება $(m;n)$ წერტილთა წყვილების სიმრავლეს, სადაც კოორდინატული არეებით დაფარვა განიმარტება როგორც

$$M\times N=\bigcup_{p,q} U_q\times V_p$$

ანუ U_q არეში გვაქვს x_q^{α} კოორდინატები, ხოლო V_p არეში - y_p^{β}, მაშინ $U_q\times V_p$ არეში კოორდინატები იქნება $\left(x_q^{\alpha},y_p^{\beta}\right)$.

მრავალნაირობას ეწოდება *ორიენტირებული* (დადებითად ან უარყოფიდათ) , თუ გადასვლის იაკობიანები I_{pq} (6) დადებითია (უარყოფითია) ყველა გადამკვეთი არეების წყვილებისათვის. მაგალითად, $\Re^n$ ევკლიდეს სივრცე განმარტებით ორიენტირებულია – ან დადებითად ან უარყოფიდათ.

3. ტენზორები და ტენზორული ველები.

ა) *ორი შესაძლო აღწერა.*

ზოგადად, როგორც ავღნიშნეთ შესავალში, ჩვენ უნდა შეგვეძლოს ფიზიკური კანონების ფორმულირება დამოუკიდებლად კონკრეტული საკოორდინატო სისტემის არჩევისა. ამისთვის არსებობს ორი გზა – *ტენზორული ანალიზი* და *დიფერენციალური გეომეტრია*, რომლებიც შედეგობრივად სრულებით ექვივალენტურია, თუმცა გარკვეულ შემთხვევებში იჩენენ უპირატესობას ერთმანეთის მიმართ. ჩვენ შემდგომ განვიხილავთ ამ მიდგომების გამოყენებებს კომპლემენტარულად – ჯერ ისე როგორც მიღებულია ტენზორულ ანალიზში, მერე კი დიფერენციალური გეომეტრიის კონტექსტში.

ორივე შენთხვევაში საქმე გვაქვს მათემატიკურ ობიექტებთან, რომლებსაც ეწოდება ტენზორები ან ტენზორული ველები რადგან ზოგადად ისინი ლოკალური მდებარეობის (კოორდინატის) ფუნქციები არიან. ტენზორების კლასიფიკაცია ხდება მათი რანგის მიხედვით. $(p,\, q)$ ტიპის $p+q$ რანგის ტენზორი ეწოდება ობიექტს, რომელიც მოიცემა $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ კომპონენტების ერთობლიობით კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაში $\left(x^1, \dots, x^n\right)$, რომლის კომპონენტური ჩანაწერი დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემაზე შემდეგი წესით: თუ $x^i = x^i\left(z^1, \dots, z^n\right)$, $z^j = z^j\left(x^1, \dots, x^n\right)$ და $z(x(z)) = z$ მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \sum_{(k)(l)} T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{k_p}} \frac{\partial z^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial z^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \tag{7}$$

სადაც ტენზორები $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ და $T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}$ მოცემულია შესაბამისად კოორდინატთა სისტემებში $\left(x^1, \dots, x^n\right)$ და $\left(z^1, \dots, z^n\right)$, და ინდექსები $\left(i_1 \dots i_p; j_1 \dots j_q\right)$ და $\left(k_1 \dots k_p; l_1 \dots l_q\right)$ იცვლება 1-დან n-მდე.

ამ მიდგომასთან განსხვავებით დიფერენციალურ გეომეტრიის მიდგომაში არ კეთდება რაიმე მითითება საკოორდინატო სისტემაზე. ტენზორული ველი განისაზღვრება მარავალნაირობაში როგორც თვისება, რომელიც მიენიჭება ამ პრავალანაირობის ყოველ წერტილს. რა თქმა უნდა თუ ამ მრავალნაირობაში შემოყვანილია საკოორდინატო სისტემა მაშინ ამ ვექტორის კომპონენტები ზუსტად ისეთივეა როგორც ტენზორულ ანალიზის მოდგომაში, მაგრამ ასეთი საკოორდინატო სისტემის შემოყვანა არ არის აუცილებელი.

ბ) *სკალარი.*

სკალარი ნულოვანი რანგის ტენზორია, რომელიც აღინიშნება როგორც $\binom{0}{0}$. სკალარი არ გარდაიქმნება, თუ ის უბრალოდ რიცხვია. თუ ის ველია მაშინ მის გარდაქმნას ერთი საკოორდინატო სისტემიდან მეორეში გადასვლისას აქვს - თანახმად (7) განტოლებისა - მარტივი სახე $f'(x')=f(x)$.

დიფერენციალური გეომეტრიის ენაზე ეს სკალარული ველი უბრალოდ რეალური $f(P)$ ფუნქციაა, რომელიც მიაწერს რაიმე რიცხვს მრავალნაირობის ყოველ წერტილს P. თუ ამ წერტილს აქვს x კოორდინატები ერთ სისტემაში და x' კოორდინატები მეორეში მაშინ გასაგებია რომ უნდა იყოს (რაც დავწერეთ ზემოთ) $f'(x')=f(x)=f(P)$, რადგან ერთ და იგივე წერტილზეა ლაპარაკი.

გ) *ვექტორი.*

ვექტორი პირველი რანგის ტენზორია, რომელიც გარდაიქმნება x-კოორდინატებიდან z-კოორდინატებზე გადასვლისას თანახმად (7) როგორც

$$T^i = \sum_{(k)} T^k \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \tag{8}$$

თუ იგი, როგორც ამბობენ ტენზორულ ანალიზის მიდგომაში, *კონტრავარიანტული ვექტორია* $\binom{1}{0}$, ან როგორც

$$T_j = \sum_{(l)} T_l \frac{\partial z^l}{\partial x^l} \tag{8'}$$

თუ იგი *კოვარიანტული ვექტორია* $\binom{0}{1}$. კონტრავარიანტული და კოვარიანტული ვექტორების ყველაზე ცნობილ მაგალითებს მინკოვსკის სივრცეში წარმოადგენენ თვითონ 4-კოორდინატები x^{μ} და x_{μ} შესაბამისად.

ახლა დავინახოთ როგორ გამოიყურება ეს ყველაფერი დიფერენციალური გეომეტრიის მიდგომაში.

(i) ვთქვათ მრავალნაირობაზე მოცემულია მრუდი დამოკიდებული რაიმე τ პარამეტრზე რომელიც იცვლება a-b ინტერვალში: $x = x(\tau)$ $a \le \tau \le b$. სანამ მრუდი იმყოფება U_p არის ლოკალური კოორდინატების $\left(x_p^{\alpha}\right)$ $(\alpha = 1...n)$ მოქმედების

არეში მრუდი შეიძლება ჩაიწეროს $x_p^\alpha = x_p^\alpha(\tau)$ სახით. შესაბამისად მრუდის მხები ვექტორი ანუ სიჩქარის ვექტორი იქნება

$$\dot{x}_p = \left(\dot{x}_p^1, \ldots, \dot{x}_p^n\right),$$

სადაც წერტილი ნიშნავს წარმოებულს τ პარამეტრის მიმართ. თანაკვეთ არეში $U_p \cap U_q$, სადაც მოქმედებს ორი ლოკალური კოორდინატთა სისტემა $x_p^\alpha(\tau)$ და $x_q^\nu(\tau)$, თანაც $x_p^\alpha\left(x_q^1(\tau)\ldots x_q^n(\tau)\right) \equiv x_p^\alpha(\tau)$. სიჩქარის ვექტორისათვის გვექნება შემდეგი გარდაქმნის კანონი

$$\dot{x}_p^\alpha = \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\nu}\dot{x}_q^\nu \quad . \tag{9}$$

რაც თანხვედრაშია კონტრავარიანტული ვექტორის გარდაქმნის კანონთან (8). ჩვენ ვხედავთ, რომ მხები ვექტორები (9) ქმნიან *n-განზომილებიან წრფივ სივრცეს.*

ზოგადად ვთქვათ რომ ვექტორი დიფერენციალურ გეომეტრიაში არის წარმოებულის ოპერაცია ფუნქციაზე რომელიც მოცემულია მრავალნაირობაზე, ანუ ამ ფუნქციის "სიჩქარის" ოპერატორი მრავალნაირობაში. მაგალითად, თუ გვაქვს რაიმე მრუდი $\Phi(\lambda)$ მარავალნაირობაზე, მაშინ ვექტორი არის ამ მრუდის მხები ვექტორი, ანუ ამ მრუდის გასწვრივ გაწარმოების ოპერატორი $V \equiv d/d\lambda$. მისი რიცხობრივი სიდიდე ჩნდება მაშინ როცა ვიხილავთ მის კომპონენტებს რაიმე კონკრეტულ საკოორდინატო სისტენაში – მაშინ ის ყოველთვის თანხვედრაშია იმ სიდიდესთან (ვექტორის მოდულთან), რომელიც შესაბასად გამოდის ტენზორული ანალიზისიდან. თუ ვთქვათ ეს მრუდი კონკრეტულ საკოორდინატო სისტემაში წარმოდგენილია ფუქციებით $x^\mu(\lambda)$ მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$V \equiv \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv V^\mu \partial_\mu = V^\mu X_\mu \tag{10}$$

სადაც სიდიდეებს X_μ უწოდებენ ამ სისტემის საბაზისო ვექტორებს, V_μ კი ჩვენი V ვექტორის კომპონენტებია, რომლებიც თანახმად (9) გარდაიქმნებიან როგორც

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} V^\mu \quad , \qquad \Lambda^{\mu'}_{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \quad , \qquad \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\sigma_\nu = \delta^\mu_\nu \tag{11}$$

სადაც $\Lambda^{\mu'}_{\mu}$ შეესაბამება ზოგად კოვარიანტულ გარდაქმნებს, ანუ კოორდინატების ყველა შესაძლო გარდაქმნებს, რომლებიც როცა გადავდივართ მინკოვსკის ბრტყელ სივრცეში შეესატყვისება ლორენცის გარდაქმნებს.

(ii) ჩვენ ვნახეთ რას წარმოადგენს კონტრავარიანტული ვექტორის ანალოგი დიფერენციალურ გეომეტრიაში. ახლა გავიაზროთ როგორ უნდა იყოს

განმარტებული *კოვარიანტული ვექტორის ცნება.* ამისთვის შემოყავთ მათემატიკური ობიექტი, რომელსაც უწოდებენ *1-ფორმას* ω. აპრიორულად გასაგებია რომ ეს ობიექტი უნდა განისაზღვროს ისე რომ მისი მოქმედება ვექტორზე იძლეოდეს სკალარს ისე როგორც ეს ხდება როცა კოვარიანტული ვექტორი მრავლდება (''იკვრება'') კონტრავარიანტულ ვექტორზე (ვექტორთან) და გვაძლევს მათ სკალარულ ნამრავლს.

ცნობილი მაგალითი ასეთი სკალარული ნამრავლისა არის ორი ევკლიდური ვექტორის ნამრავლი. ეს ნამრავლი გულისხმობს ევკლიდური სივრცის მეტრიკის არსებობას და ამიტომ მისი შემოყვანა არანაირ პრობლემას არ წარმოადგენს

$$u \cdot v = g_{ij} u^i v^j = u^1v^1+u^2v^2+u^3v^3, \quad g_{ij} = diag\,(1,1,1)$$

ამიტომ ძირთადი საკითხი ამ კონტექსტში არის – შეიძლება თუ არა სკალარული ნამრავლის შემოყვანა მრავალნაირობაზე, რომელსაც მეტრიკა არ გააჩნია? აღმოჩნდა რომ ეს შესაძლებელია თუ ვიტყვით რომ 1-ფორმა ω ვექტორის V წრფივი ფუნქციაა, ანუ მისი მნიშვნელობა ნებისმიერ საკოორდინატო სისტემაში უნდა იყოს პროპორციული ვექტორის კომპონენტების წრფივი კომბინაციისა

$$\omega(V) = \omega(V^\mu X_\mu) = a(x)V^\mu X_\mu = \omega_\mu V^\mu \qquad (12)$$

სადაც კოეფიციენტები $\omega_\mu = a(x)X_\mu$ 1-ფორმის კომპონენტები არიან იმ სისტემაში, რომელშიც V ვექტორს V^μ კომპონენტები გააჩნია (a რაიმე კონსტანტა ან სკალარული ველია). საგულისხმოა რომ ეს კოეფიციენტები პროპორციულებია ბაზისური X_μ ვექტრორებისა, რომლებიც ავტომატურად კოვარიანტული ვექტორების სახით წარმოჩნდებიან. ეს ნიშნავს, რომ 1-ფორმის კომპონენტები ყოველთვის ''კრავენ'' ინვარიანტულ სკალარულ ნამრავლს შესაბამის ვექტორის კომპონენტებთან

$$\omega_{\mu'}V^{\mu'} = \omega_\mu \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^{\mu'}_\nu V^\nu = \omega_\mu V^\mu \quad . \qquad (13)$$

ავღნიშნოთ, რომ 1-ფორმის კომპონენტები იგივე საბაზისო ვექტორებია, რომლებიც ჩვენ შემოვიყვანეთ, როცა ვსაუბრობდით ვექტორის ინვარიანტულ განმარტებაზე (10) მრავალნაირობაში. მართლაც, იმ სიტუაციაში, როცა გვაქვს მხოლოდ ვექტორის კოორდინატული კომპონენტები V^μ ან თვით კოორდინატა x^μ , რა კომპონენტები უნდა ჰქონდეს 1-ფორმას რომ შეკრას სკალარული ნამრავლი ვექტორთან? გასაგებია, რომ ერთადერთი შესაძლებლობაა რომ ეს კოპონენტები იყვნენ საბაზისო ვექტორები $X_\mu = \partial / \partial x^\mu$ რადგან სხვა სათანადო ობიექტი x^μ კოორდინატისაგან (ან სხვა ვექტორის კომპონენტებიდან) უბრალოდ ვერ აიგება. ამის გამო თვით სახელწოდება ''1-ფორმა'' გულისხმობს ''პირველ დიფერენციალურ ფორმას'', და რეალურად მეტს არაფერს.

უმარტივეს 1-ფორმას წარმოადგენს ნებისმიერი სკალარული *f(x)* ფუნქციის გრადიენტი, რომლის კომპონენტებია $\partial_\mu f(x)$. ამ 1-ფორმას აღნიშნავენ როგორც ω_f. შემდეგ, თუ მრავალნაირობაში მოცემულია მრუდი დამოკიდებული რაიმე პარამეტრზე λ ისე რომ ამ მრუდის შესაბამისი კოორდინატები მოცემულია ფუნქციებით $x^\mu(\lambda)$ და $V = d/d\lambda$ ამ მრუდის ტანგენციალური ვექტორია, მაშინ შეიძლება გავნმარტოდ ახალი სკალარული ველი $\omega_f(V)$

$$\omega_f(V) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \qquad (14)$$

რომელიც არის *f(x)* ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე $x^\mu(\lambda)$ მრუდის გასწვრივ.

დ) ***ტენზორები***

ანალოგიურად შეიძლება განხილულ იქნას ნებისმიერი რანგის ტენზორი $\binom{a}{b}$ როგორც ტენზორული ანალიზის მიდგომაში ზოგადი ფორმულის (7) თანახმად, ასევე დიფერენციალური გეომეტრიის ენაზე.

ე) ***ზოგად კოვარიანტული გარდაქმნების ჯგუფი.***

სიმეტრიის ჯგუფს, რომლის მიმართ გარდაიქმნებიან ვექტორები და ტენზორები (იხ., მაგალითად (11)) უწოდებენ ზოგად კოვარიანტულ ჯგუფს. მართლაც, ეს გარდაქმნები აკმაყოფილებს ჯგუფის თვისებებს:

(i) არსებობს ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი, ანუ იგივური გარდაქმნა, რომელსაც შეესაბამება δ^μ_ν .

(j) არსებობს შებრუნებული ელემენტი, რომელიც შეესაბამება შეცვლას

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \quad \to \quad \Lambda^{\nu}_{\mu'} \equiv \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}$$

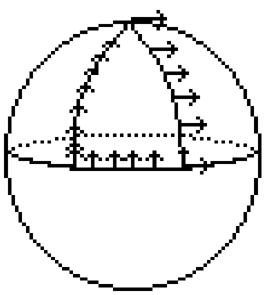
(k) მუშაობს კომპოზიციის კანონი: ორი ნებისმიერი თანმიმდევრებულად განხორციელებულ გარდაქმნისათვის არსებობს ჯამური გარდაქმნა, რომელიც მიექუთვნება ამავე გარდაქმნების ერთობლიობას, ანუ $\Lambda^\mu_\nu \Lambda^\nu_\rho = \Lambda^\mu_\rho$.

ამ ჯგუფის მიმართ, როგორც ჩვენ დავინახავთ შემდგომ (ნაწილი II), გრავიტაციული ურთიერთქმედება ინვარიანტულია.

4. კოვარიანტული დიფერენცირება.

ა) *თენზორების მოძრაობა ბრტყელ და მრუდე სივრცეში.*

ბრტყელ სივრცეში, და კერძოდ ლორენც-მინკოვსკის სივრცეში, ტენზორების მოძრაობა, ანუ მათი გადატანა ერთი წერტილიდან მეორე წერტილში არ წარმოადგენს რაიმე პრობლემას, რადგან მათი სივრცული ორიენტაცია ამ მოძრაობის დროს არ იცვლება. თუ სივრცე მრუდეა ასეთი თავისუფალი გადატანის თვისება გააჩნიათ მხოლოდ სკალარებს, ხოლო ვექტორები და ტენზორები წერტილიდან წერტილამდე მოძრაობისას, გარდა მნიშვნელობისა, თავის *სირცულ ორიენტაციასაც* იცვლიან. ეს წარმოშობს პრობლემას – როგორ შევადაროთ ასეთი ვექტორის ან ტენზორის სახე ორ მეზობელ წერტილში, ანუ როგორ დავითვალოთ მისი წარმოებული, რომელიც გამოსახავს ამ მოძრაობის სიჩქარეს. გასაგებია ეს წარმოებული ვერ იქნება ჩვეულებრივი წარმოებული, რომელიც ითვლის მხოლოდ ვექტორის (ან ტენზორის) მნიშვნელობის ცვლილებას წერტილიდან წერტილამდე და არ ითვალისწინებს მისი ორიენტაციის ცვლილებას. როგორც დავინახავთ, ამ ბოლო ცვლილების გასათვალისწინებლად საჭირო ხდება სპეციალური პროცედურის შემოყვანა, რომელსაც უწოდებენ *პარალელურ გადატანას.* პარალელური გადატანა, როგორც ავღნიშნეთ, ტრივიალური პროცედურაა ბრტყელ სივრცეში რადგან ასეთი გადატანის დროს ვექტორის მიმართულება არ იცვლებაა. სრულებით განსხვავებულია სიტუაცია მრუდე სივრცეში რაც ნათლად ჩანს შემდეგი მაგალითიდან – თუ როგორ ხდება ვექტორის მიმართულების შეცვლა გამრუდებულ ზედაპირზე ვექტორის პარალელური გადატანის დროს.



განვიხილოთ დედამიწის ზედაპირი და მასზე ვექტორის ცვლილება პარალელური გადატანისას ეკვატორიდან ჩრდილოეთ პოლუსამდე და შემდეგ სხვა მერიდიანის გასწვრივ ეკვატორისკენ. თუ ახლა შევადარებთ ამ ვექტორს ეკვატორის გასწვრივ პარალელურად გადატანილ ვექტორს დავწრმუნდებით, რომ ისინი ურთიერთმართობულნი არიან.

ბ) *ტენზორების წარმოებულები ტენზორები არ არიან.*

როგორც ვიცით ვექტორის ზოგად კოორდინატულ (კოვარიანტულ) გარდაქმნებს აქვთ სახე $V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} V^{\mu}$ (11). ახლა განვიხილოთ ვექტორის წარმოებული $\partial_{\nu} V^{\mu}$ და ვნახოთ რა გარდაქმნის კანონი შეესაბამება მას. თანახმად 2-ინდექსიანი ტენზორის გარდაქმნებისა ზოგადად გვაქვს

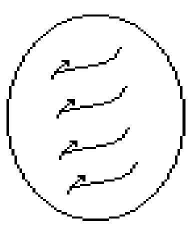
$$T^{\mu'}_{\nu'} = \partial_{\nu'} V^{\mu'} = \Lambda^{\sigma}_{\nu'} \partial_{\sigma}\left(\Lambda^{\mu'}_{\rho} V^{\rho}\right) = \Lambda^{\sigma}_{\nu'}\Lambda^{\mu'}_{\rho} \partial_{\sigma} V^{\rho} + \Lambda^{\sigma}_{\nu'} V^{\rho} \partial_{\sigma}\Lambda^{\mu'}_{\rho} \qquad (15)$$

სადაც მართლაც პირველი წევრი შეესაბამება 2-ინდექსიანი ტენზორის გარდაქმნას, მაგრამ მეორე წევრის არსებობა არღვევს ამ გარდაქმნის ტენზორულ ბუნებას და საბოლოო ჯამში ზოგად კოვარიანტულ სიმეტრიას რადგან ამ ტიპის (15) ტენზორისათვის ვერ აიგება ინვარიანტული ლაგრანჟიანი. მეორეს მხრივ, თუ ეს წევრი ნულია, ანუ

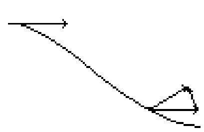
$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x_{\rho}} = 0$$

მაშინ პრობლემა ავტომატურად მოიხსნება, მაგრამ ამ შემთხვევაში $\partial x^{\mu'} / \partial x_{\rho}$ მუდმივი სიდიდე გამოდის, რასაც აკმაყოფილებს მხოლოდ წრფივი გარდაქმნები $x^{\mu'} = a x^{\mu}$. ასეთი გარდაქმნები კი შეესაბამება ბრტყელ სივრცეს და ჩვენთვის ამ ლექციის კონტექსტში ინტერესს არ წარმოადგენს.

გ) *პარალელური გადატანა*.



განვიხილოთ რაიმე წირის (პარამეტრიზებულ λ პარამეტრით) შესაბამისი მხები ვექტორის ევოლუცია მრავალნაირობაში. ამ ვექტორის ცვლილება წირის გასწვრივ ზოგადად შედგება ორი ნაწილისაგან - სიდიდის ცვლილების შესაბამისი და მიმართულების ცვლილების შესაბამისი ნაწილისაგან. მრავალნაირობაში წირის მხები ვექტორია $d/d\lambda$ (10). გადავიტანოთ ახლა ''პარალელურად'' ეს ვექტორი $\delta\lambda$ მანძილზე P წერტილიდან Q წერტილში. მაშინ ეს ვექტორი Q წერტილში უნდა განიმარტოს



როგორც

$$V(P \to Q) = \frac{d}{d\lambda}\left(1 - \delta\lambda\right)$$

რაც ნიშნავს რომ ვექტორმა Q წერტილში შეინარჩუნა იგივე ორიენტაცია $(d/d\lambda)$ რაც მას ჰქონდა P წერტილში (ნიშანი '-' პირობითია). თუ ახლა გადავწერთ ამ გამოსახულებას ასე

$$V(P \to Q) = V(P) - \delta\lambda V(P) \qquad (16)$$

მაშინ ის ადვილად ჩაიწერება კომპონენტებში (დაკავშირებულ რაიმე საკოორდინატო სისტემასთან, რომელშიც 4-კოორდინატა $x^{\mu}(\lambda)$ დამოკიდებულია წირის პარამეტრზე λ)

$$V^{\mu}(P \to Q) = V^{\mu}(P) - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} V^{\sigma} \delta x^{\rho} \qquad \delta x^{\rho} = \delta\lambda \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \tag{16'}$$

სადაც $\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}$ სიდიდეებს ეწოდებათ აფინური ბმულობის კოეფიციენტები, ან კრისტოფელის სიმბოლოები. ადვილად მისახვედრია, რომ ბრტყელი სივრცისათვის პარალელური გადატანა უნდა გვაძლევდეს ვექტორის იგივე მიმართულებას და ამის შედეგად ყველა $\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} = 0$.

დ) *ტენზორების კოვარიანტული წარმოებულები*

ვექტორების და ტენზორების პარალელური გადატანის პროცედურა უკვე იძლევა საშუალებას შევადაროთ მათი სახეები მეზობელ წერტილებში, ანუ დავითვალოთ მათი წარმოებულები.

(i) ვექტორის წარმოებული წირის გასწვრივ ჩვენი განხილვის თანახმად იქნება

$$\frac{DV}{d\lambda} = \frac{V(Q) - V(P \to Q)}{\delta\lambda} \quad . \tag{17}$$

გადავწეროთ (17) კოორდინატულ სივრცეში, რაც გამოსახულების (16’) გამოყენების შედეგად გვაძლევს

$$\frac{DV^{\mu}}{d\lambda} = \frac{V^{\mu}(Q) - V^{\mu}(P)}{\delta\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} V^{\sigma} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \tag{18}$$

ანუ

$$\frac{DV^{\mu}}{d\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} V^{\sigma} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} = \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \nabla_{\rho} V^{\mu} \tag{19}$$

სადაც გამოსახულებას

$$\nabla_{\rho} V^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} V^{\sigma} \tag{20}$$

კოვარიანტული წარმოებული ეწოდება. მრუდე სივრცისათვის ვექტორის წარმოებული $\partial_{\rho} V^{\mu}$ შეიცვალა $\nabla_{\rho} V^{\mu}$ კოვარიანტული წარმოებულით რომელიც, როგორც ვნახავთ ქვემოთ, ზოგად კოვარიანტული ჯგუფის მიმართ

სრულუფლებიანი 2-ინდექსიანი ტენზორია. ამისთვის, $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ ფუნქციების ერთობლიობა კოორდინატთა შეცვლისას უნდა გარდაიქმნებოდნენ შემდეგნაირად

$$\Gamma^{\mu'}_{\nu'\sigma'} = \Lambda^{\mu'}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{\nu'}\Lambda^{\gamma}_{\sigma'}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Lambda^{\mu'}_{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\sigma'}} \quad . \qquad (21)$$

აღსანიშნავია რომ $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ სიმბოლოები გარდაიქმნებიან როგორც ტენზორები, **მხ**ოლოდ წრფივი ან აფინური გარდაქმნისას, როცა

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\sigma'}} \equiv 0 .$$

ზოგად შემთ**ხ**ვევაში კი ამ გარდაქმნებს გააჩნიათ არაერთგვაროვანი ნაწილი (მეორე წევრი (21)), რაც ძალიან გავს ყალიბური ველების გარდაქმნებს (ი**ხ**. ნაწილი **II**).

(ii) განვი**ხ**ილოთ ა**ხ**ლა ნებისმიერი რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული. იგი ცალსა**ხ**ად განისაზღვრება მისი შემდეგი თვისებებით:

1/ კოვარიანტული გაწარმოება წრფივი ოპერაციაა.

2/ ნულოვანი რანგის ტენზორის, ანუ სკალარის კოვარიანტული წარმოებული ჩვეულებრივი წარმოებულია $\nabla_{\rho} f = \partial f / \partial x^{\rho}$.

3/ ვექტორული ველის კოვარიანტული წარმოებული არის

$$\nabla_{\rho} V^{\mu} = \partial_{\rho} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} V^{\sigma} \qquad (20')$$

4/ ტენზორების ნამრავლის კოვარიანტული წარმოებული გამოითვლება ნამრავლის კოვარიანტული დიფერენცირების ფორმულით (i,j,k,l – ჩვეულებრივი 4-ინდექსებია)

$$\nabla_{k}(R^{(i)}_{(p)} S^{(j)}_{(q)}) = \left(\nabla_{k} R^{(i)}_{(p)}\right) S^{(j)}_{(q)} + R^{(i)}_{(p)}\left(\nabla_{k} S^{(j)}_{(q)}\right) \qquad (22)$$

მეორე რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულები მოიცემიან ფორმულებით:

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} T^{lj} + \Gamma^i_{lk} T^{il}$$

$$\nabla_k T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} T^l_j - \Gamma^l_{jk} T^i_l \tag{22'}$$

$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^i_{jk} T_{il} \quad .$$

4. გეოდეზიურები.

ა) *გეოდეზიური წირი.*

მრუდე ზედაპირების განხილვისას საჭირო ხდება ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილის განსაზღვრა, ანუ საჭიროა ბრტყელი სივცის წრფეების ანალოგის შემოტანა ასეთ ზედაპირებზე. ასეთ წირებს მრუდე სივრცეში *გეოდეზიური წირები* ეწოდებათ. მათი განტოლების დადგენისათვის ბუნებრივია გამოვიყენოთ პარალელური გადატანის ცნება და მოვითხოვოთ რომ სიჩქარის ორიენტაცია ამ გეოდეზიურ წირზე იყოს მუდმივი. ანუ თუ ეს წირი $x^{\mu}(\tau)$ მოცემულია რაიმე პარამეტრზე τ დამოკიდებულით, მაშინ შესაბამისი სიჩქარის $V^{\mu} = dx^{\mu} / d\tau$ ცვლილება უნდა გამოისახოს პარალელურ გადატანასთან დაკავშირებულ განტოლებით (17, 18)

$$\Delta V^{\mu} = \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} V^{\rho} \Delta x^{\sigma}$$

საიდანაც ორივე მხარის $\Delta\tau$-ზე გაყოფით ვღებულობთ (ზღვარზე $\Delta t \to 0$) გეოდეზიური წირის განტოლებას

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} = 0 \qquad (23)$$

დეკარტეს კოორდინატებში. ადვილად შესამოწმებელია, რომ გეოდეზიური წირის სიჩქარე $V^{\mu} = dx^{\mu} / d\tau$ აკმაყოფილებს პირობას $\nabla_{\rho}(V^{\mu}) = 0$ (ამოცანა 5), ანუ ამ სიჩქარის კოვარიანტული წარმოებული ყოველთვის უდრის ნულს. ამ პირობას ხშირად იყენებენ გეოდეზიური წირის დამოუკიდებელი განმარტებისათვის.

ავღნიშნოთ რომ თუ $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = 0$, მაშინ ამ განტოლების ამონახსნია ჩვეულებრივი წრფეები, როგორც ეს გვაქვს ნიუტონის ან რელატივისტურ მექანიკაში, თუ τ პარამეტერს განვიხილავთ როგორც დროს. მივაქციოთ ყურადღება ასევე იმას, რომ ნიუტონის პირველი კანონი განიცდის საოცარ მოდიფიკაციას მრუდე სივრცეში – “თავისუფალ” ნაწილაკს შეიძლება ჰქონდეს არანულოვანი აჩქარება!

ბ) *გეოდეზიური სფერულ კოორდინატებში (სავარჯიშო).*

სფერულ კოორდინატებში არანულოვანი კრისტოფელის სიმბოლოები იქნება მხოლოდ

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\vartheta \qquad \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta} = -r \qquad \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} = \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta r} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r}\,.$$

შესაბამისად გეოდეზიურის განტოლებებს ექნებათ სახე

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right)^2 = 0 \tag{24}$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} - r\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \tag{25}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{d\vartheta}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0 \tag{27}$$

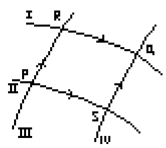
სადაც ამჯერად პარამეტრი λ (τ-ს ნაცვლად) იქნა გამოყენებული.

6. სიმრუდე.

ა) <u>*სიმრუდის განსაზღვრა. რიმანის ტენზორი*</u>.

რაში გამოიხატება სივრცე-დროის სიმრუდე და როგორ შეიძლება აღვწეროთ იგი რიცხობრივად? როგორც ვნახეთ ამის ერთ-ერთი ნათელი გამოხატულებაა გეოდეზიურების გადახრა (ანუ საცდელი სხეულის ფარდობითი აჩქარება, იხ. (23)). სხვა ასეთ გამოვლინებას წარმოადგენს ვექტორის ცვლილება ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ პარალელური გადატანისას.

განვიხილოთ გეოდეზიური წირები რაიმე ზედაპირზე და მივიღოთ რომ მათი



გადაკვეთით შექმნილი ბადის ფრაგმენტია *PRQS*. ვთქვათ, *P* წერტილიდან ვიწყებთ ვექტორის პარალელურ გადატანას შეკრული წირის გასწვრივ. ეს გადატანა იქნება

$$\delta_{PRQSP}V^{\mu}=\delta_{PR}\mathrm{V}^{\mu}+\delta_{RQ}\mathrm{V}^{\mu}+\delta_{QS}\mathrm{V}^{\mu}+\delta_{SP}\mathrm{V}^{\mu}$$

ამასთან, მოძრაობა *QSP* მიმართულებით შეიძლება განვიხილოთ როგორც მოძრაობა *PSQ* მიმართულებით ოღონდ საპირისპირო ნიშნით

$$\delta_{PRQSP}V^{\mu}=\delta_{PRQ}\mathrm{V}^{\mu}-\delta_{PSQ}\mathrm{V}^{\mu}=\delta_{1}\mathrm{V}^{\mu}-\delta_{2}\mathrm{V}^{\mu} \qquad (28)$$

ვთქვათ, I და II გეოდეზიურების გასწვრივ მოძრაობისას იცვლება x^{σ},

$$RQ=PS=\delta x^{\sigma}$$

ხოლო III და IV-ს გასწვრივ მოძრაობისას იცვლება y^{ρ},

$$PR=SQ=\delta y^{\rho} \quad .$$

თანახმად (16’) $\delta V^{\mu}\big|_{B}\equiv V^{\mu}(A\to B)-V^{\mu}(A)=-\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}V^{\sigma}dx^{\nu}$ თითოეული ნაწილისათვის გვექნება:

$$\delta_{1}V^{\mu}=-\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}V^{\sigma}\big|_{R}\delta y^{\rho}-\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}V^{\rho}\big|_{Q}\delta x^{\sigma}$$

$$\delta_2 V^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} V^{\rho}\Big|_S \delta x^{\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} V^{\sigma}\Big|_Q \delta y^{\rho} \quad .$$

და რადგანაც

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}(R) = \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}(P) + \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\delta y^{\alpha}$$
$$V^{\rho}(P \to R) = -\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} V^{\alpha} \delta y^{\beta} + V^{\rho}(P)$$

მაშინ სრული ვექტორის ცვლილებისათვის ჩაკეტილ კონტურში *PRQSP* (28)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\delta V^{\mu} = R^{\mu}_{\nu\sigma\rho} V^{\nu} \delta x^{\sigma} \delta y^{\rho} \tag{29}$$

სადაც (თუ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\alpha} \equiv \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$)

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\rho} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\,. \tag{30}$$

რიმანის ტენზორია.

იგივე გამოსახულების (30) მიღება შეიძლება თუ ჩაკეტილ კონტურში პარალელური გადატანის მაგივრად ვიმოქმედებთ ვექტორულ ველზე ორი კოვარიანტული წარმოებულის კომუტატორით

$$[\nabla_{\sigma}, \nabla_{\rho}]V^{\mu} = R^{\mu}_{\nu\sigma\rho} V^{\nu} + (\Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma})\nabla_{\lambda} V^{\mu} \tag{31}$$

მეორე წევრი ამ გამოსახულებაში შეესაბამება ე.წ. *გრეხის ტენზორს.* ეს ნიშნავს, რომ სივრცეს გარდა სიმრუდისა შეიძლება გააჩნდეს გრეხაც, თუ აფინურ ბმულობას აქვს არანულოვანი ანტისიმეტრიული ნაწილი. ჩვენ შემდგომ სიმარტივისათვის მივიღებთ რომ $\Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho} = \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$, როგორც ეს მიღებულია ზოგადი ფარდობითობის თეორიის სტანდარტულ ვერსიაში.

ბ) *<u>რიჩის ტენზორი.</u>*

აპრიორულად, რიმანის $R^{\mu}_{\nu\sigma\rho}$ ტენზორი თავისი (ზოგადად) 256 კომპონენტით საეჭვოდ გვეჩვენება ფიზიკის თვალსაზრისით, რადგან მისი რაიმე ლაგრანჟიანში ან მოძრაობის განტოლებაში გამოყენება გულისხმობს კომპონენტების ასეთივე რაოდენობის მქონე სხვა ფიზიკურ სიდიდეებსაც, რაც ძნელად წარმოსადგენია.

ამიტომ ფიზიკური გამოყენების თვალსაზრისით საუბრობენ, როგორ წესი, სიმრუდეს რიჩის ტენზორზე, რომელიც მიიღება რიმანის ტენზორიდან თუ მას ავჯამავთ ორ ინდექსის მიმართ

$$R_{\nu\rho} = R^{\mu}_{\nu\mu\rho} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\mu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\mu,\rho} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \qquad (32)$$

ამ ტენზორს გააჩნია მხოლოდ 16 კომპონენტი (და თუ მივიღებთ, რომ ის შეიძლება იყოს სიმეტრიული – სულ 10). ეს კი უკვე უნიკალურ თანხვედრაშია კომპონენტების იმ რაოდენობასთან, რომელიც გააჩნია სხვადასხვა ნაწილაკების ან/და ველების ენერგია-იმპულსის ტენზორს (იხ. ნაწილი II). ეს გარემოება ერთგვარად ჯადოსნური მიგითითებაა იმ კავშირზე, რომელიც უნდა არსებობდეს სირცე-დროის სიმრუდესა და მატერიის ენერგია-იმპულსს შორის.

6. **მეტრიკა.**

ა) *მეტრიკის არსი და ძირითადი გამოყენებანი*.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ზოგადად სივრცეებს და არა აუცილებლად *მეტრიკულ სივრცეებს*, რომლებიც უნდა აკმაყოფილებდნენ მთელ რიგ დამატებით მოთხოვნებს (იხ. 2). მაგრამ ფიზიკურ სამყაროში სივრცე-დროის გეომეტრიას საფუძვლად უდევს აინშტაინის ზოგად კოვარიანტობის პრინციპი (ძლიერი ექვივალენტობის პრინციპი), რომლის თანახმად სხეულის მოძრაობა სივრცე-დროის ნებისმიერ ლოკალურ არეში შეიძლება იქნას განხილული როგორც სწორხაზოვნი და თანაბარი, თუმცა ზოგადად ეს დრო-სივრცე მრუდეა. ეს ნიშნავს, რომ ამ ლოკალურ არეში შეიძლება შემოყვანილ იქნას ბრტყელი მინკოწსკის სივრცე, რომლსაც გააჩნია მუდმივი მეტრიკული ტენზორი (3). ბუნებრივია ვიფიქროდ, რომ თუ მეტრიკა გააჩნია სივრცის ლოკალურ არეს, მაშინ რაიმე სახის მეტრიკა უნდა გააჩნდეს მთელ ფიზიკურ სივრცე-დროსაც, ანუ ეს სივრცე-დრო უნდა იყოს მეტრიკული. საყოველთაოდ მიღებულია (თუმცა შესაძლებელია სხვა მოსაზრებებიც), რომ ეს მეტრიკა აღიწერება რიმანის ფსევდო-მეტრიკული ტენზორით (4).

დავაკვირდეთ ახლა მეტრიკის ძირითად გამოყენებებს.

(i) ბრტყელ ევკლიდურ ან მინკოვსკის სივრცეში მეტრიკა არის ცხრილი, რომელშიც მითითებულია ყოველ ორ ხდომილებას შორის ინტერვალების მნიშვნელობები. მრუდე სივრცეში კოორდინატების ენაზე მეტრიკა არის ათი ფუნქციის ერთობლიობა $g_{\mu\nu}\left(x^{\alpha}\right)$, ისეთი რომ გამოსახულება $\Delta S^2 = g_{\mu\nu}\left(x^{\alpha}\right)\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}$ იძლევა ინტერვალის მნიშვნელობას ნებისმიერ x^{α} და მასთან ახლოს მდებარე $x^{\alpha}+\Delta x^{\alpha}$ ხდომილებებს შორის (ანალოგიურად უსასრულოდ მცირე ინტერვალისათვის გვაქვს $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$).

დიფერენციალური გეომეტრიის ენაზე მეტრიკა არის ბიწრფივი მანქანა რომელიც წარმოქმნის რიცხვებს. დავუშვათ ორ მეზობელ წერტილს შორის გადაადგილება მოიცემა მხები ვექტორით $\xi = \Delta x^{\alpha}e_{\alpha} = \Delta x^{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$. ამ ორ ხდომილებას შორის ინტერვალისთვის გვექნება

$$\Delta S^2 \equiv \xi\cdot\xi = g\left(\Delta x^{\mu}e_{\mu},\Delta x^{\nu}e_{\nu}\right) = \Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}g\left(e_{\mu},e_{\nu}\right)$$

$$g_{\mu\nu} = g\left(e_{\mu},e_{\nu}\right) = e_{\mu}e_{\nu}$$

(ii) მეტრიკის საშუალებით შეიძლება გამოვსახოთ კუთხე ორ ვექტორს შორის

$$|V|^2 = g_{\mu\nu} V^{\mu} U^{\nu} = |V||U| \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{g_{\mu\nu} V^{\mu} U^{\nu}}{|V||U|} = \frac{g_{\mu\nu} V^{\mu} U^{\nu}}{\sqrt{g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}}\sqrt{g_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu}}} \tag{33}$$

(iii) და, ბოლოს, მეტრიკა ამყარებს კავშირს ვექტორსა და 1-ფორმას შორის

$$\omega_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu} .$$

ანუ, თუ ვილაპარაკებთ ტენზორული ანალიზის ენაზე, კოვარიანტულსა და კონტრავარიანტულ ვექტორებს (და ზოგადად ტენზორებს) შორის.

ბ) *<u>მეტრიკული ტენზორის ძირითადი განტოლება</u>*.

გავიხსენოთ ვექტორის კოვარიანტული დიფირეცირების ფორმულა (19), რომლის თანახმად

$$DV^{\mu} = dx^{\sigma} \nabla_{\sigma} V^{\mu}$$

სადაც $\nabla_{\tau} V^{\mu}$ ვექტორის კოვარიანტული წარმოებულია (20). რადგან V^{μ} და DV^{μ} ორივე ჭეშმარიტი ვექტორია შეგვიძლია დავწეროთ თანახმად მეტრიკული ტენზორის განმარტებისა შენდეგი ტოლობა

$$DV^{\mu} = D(g^{\mu\sigma} V_{\sigma}) = g^{\mu\nu} DV_{\nu} \quad .$$

თუ გამოვიყენებთ ახლა ტენზორების ნამრავლის კოვარიანტული დიფერეცირების ფორმულას (22) მივიღებთ რომ $Dg^{\mu\nu} = 0$, ანუ განტოლებას

$$\nabla_{\sigma} g^{\mu\nu} = 0 \tag{34}$$

რომელსაც უწოდებენ *მეტრიკული ტენზორის ძირითადი განტოლებას.* ანალოგიური განტოლება გამოდის მეტრიკული $g_{\mu\nu}$ ტენზორისათვისაც.

გ) *კავშირი აფინურ ბმულობასა და მეტრიკას შორის*.

კოვარიანტული წარმოებულის სახის (20) უშუალო გამოყენება მეტრიკის მიმართ ტანახმად განტოლებისა (34) გვაძლევს განტოლებას

$$g_{\mu\nu,\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} g_{\mu\lambda} = 0 \qquad (35)$$

რომელიც აკავშირებს ბმულობას მეტრიკასთან. ასეთ ბმულობას ეწოდება *მეტრიკასთან შეთანხმებული ბმულობა*. თუ მეტრიკული ტენზორი $g_{\mu\nu}$ არ არის გადაგვარებული, ანუ $g = \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$, მაშინ არსებობს ერთადერთი სიმეტრიული ($\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$) და მეტრიკასთან შეთანხმებული ბმულობა. ამ შემთხევაში განტოლება ადვილად იხსნება და ჩვენ საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left[g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right] \qquad (36)$$

რაც გვაძლევს კავშირს აფინურ ბმულობასა და მეტრიკას შორის.

ადვილად დასანახია, რომ მეტრიკული ტენზორი და მისი წარმოებულები ის პირველადი სიდიდეებია, რომელთა მეშვეობითაც გამოისახება აფინური ბმულობა და სიმრუდეს ტენზორი. ესე იგი შეიძლება ვივარაუდოთ რომ გრავიტაციის თეორიაში, რომელიც თანახმად ზოგადი ფარდობითობის პრინციპისა სივრცისა და დროის ერთადერთი თეორიაა, ეს სიდიდეები ძირითად დინამიური ცვლადებს წარმოადგენენ. საინტერესოა რომ სწორედ მეტრიკული ტენზორის გამოყენებით წარმოიშვება სივრცე-დროის სკალარული სიმრუდეს ცნება

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad (37)$$

ამ სიდიდეს უწოდებენ *რიჩის სკალარს*. ის, როგორც ვხედავთ, ინვარიანტულია ზოგად კოვარიანტული გარდაქმნების მიმართ, ანუ მისი მნიშვნელობა არ იცვლება როცა ერთი ათვლის სისტემიდან გადავდივართ ნებისმიერ სხვა სისტემაში.

დ) *მეტრიკული ტენზორი ცილინდრულ და სფერულ კოორდინატებში.*

ერთი კოორდინატებიდან მეორეზე გადასვლისას მეტრიკა გარდაიქმნება როგორც ტენზორი თანახმად ზოგადი წესისა (7)

$$g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j}$$

(i) თუ ჩვენ ვსაუბრობთ წმინდა სივრცულ გარდაქმებზე ბრტყელ სივრცეში მაშინ მეტრიკას დეკარტეს კოორდინატებში აქვს ერთეულოვანი მატრიცის სახე

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) ცილინდრულ კოორდინატებში $\left(y^1 = r \quad y^2 = \varphi \quad y^3 = z\right)$ ეს მეტრიკა გადავა

$$g_{ik}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) ხოლო სფერულ კოორდინატებში $\left(y^1 = r \quad y^2 = \vartheta \quad y^3 = \varphi\right)$ კი მივიღებთ

$$g_{ik}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

(იხ. ამოცანა 6).

ამოცანები.

1. მოცემულია ვექტორი $V^x = 2x \quad V^y = y$ და ω_f 1-ფორმა, რომელიც დაკავშირებულია ფუნქციასთან $f = x^2 + \dfrac{y^2}{2}$:
   $$\left(\omega_f\right)_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \left(\omega_f\right)_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

ა) იპოვეთ ამ ვექტორის და 1-ფორმის კომპონენტები ნებისმიერ მოტრიალებულ სისტემაში.
ბ) იპოვეთ მათივე კომპონენტები პოლარულ კოორდინატებში.
გ) დაამტკიცეთ, რომ $V^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\omega_{\beta}$.
დ) დაამტკიცეთ, რომ $V^2 = \omega_f(V)$·

2. მოცემულია ვექტორი $V(P) = (u, v)$ მითითებული დეკარტეს კოორდინატებით და მისი პარალელური გადატანა არის $V(P \to Q) = V(P)$, ანუ ის არ ცვლის კოორდინატებს.

ა) იპოვეთ გადასვლის მატრიცები $\Lambda^{\mu}_{\mu'}$ დეკარტეს (x, y) კოორდინატებიდან (r, ϑ) პოლარულ კოორდინატებში.
ბ) იპოვეთ ყველა არანულოვანი ბმულობის კოეფიციენტები.

3. მოცემულია ორი წერტილი დეკარტეს კოორდინატებით შესაბამისად $P(a, 0)$ და $Q(a\cos\alpha, \sin\alpha)$ და გვაქვს ვექტორი $V(P)$ კოორდინატებით *(1,0)*. ვაწარმოებთ ამ ვექტორის პარალელურ გადატანას წრეწირის გასწვრივ P-დან Q წერტილში.
   აჩვენეთ, რომ გადატანილი $V(P \to Q)$ ვექტორის კოორდინატებია $\left(\cos\alpha, -a^{-1}\sin\alpha\right)$.

4. ევკლიდურ სივრცეში (დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა) მოცემულია წრფე $x=a$. როგორც პარამეტრი ავირჩიოთ $\lambda = y$.
   დაამტკიცეთ, რომ პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში მართებულია გეოდეზიურის განტოლებები.

5. დაამტკიცეთ რომ გეოდეზიური წირის სიჩქარე $V^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ აკმაყოფილებს პირობას $\nabla_{\rho}(V^{\mu}) = 0$, ანუ ამ სიჩქარის კოვარიანტული წარმოებული ყოველთვის უდრის ნულს.

6. განსაზღვრეთ მეტრიკული ტენზორის $g_{\mu\nu}$-ს სახე სფერულ და ცილინდრულ კოორდინატებში ბრტყელ სივრცეში.

7. აჩვენეთ, რომ $\nabla_\nu V^\mu$ გარდაიქმნები როგორც ტენზორი.

8. დაამტკიცეთ, რომ $\nabla_\nu \omega_\mu = \dfrac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda$ აგრეთვე გარდაიქმნება როგორც ტენზორი, სადაც ω_μ 1-ფორმას კომპონენტია

9. განვიხილოთ 2-სფერო და – ვთქვათ - ვიმყოფებით მის ზედაპირზე. იპოვეთ:

ა) $ds^2 = ?$

ბ) ყველა არანულოვანი აფინური ბმულობის კოეფიციენტი $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$.

გ) გამოთვალეთ რიჩის ტენზორი $R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu}$.

დ) გამოთვალეთ რიჩის სკალარი $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

ე) დაწერეთ გეოდეზიური წირის განტოლებები.

10. იპოვეთ როგორ გარდაიქმნება

ა) 4-განზომილებიანი მოცულობა d^4x

ბ) 4-განზომილებიანი დელტა ფუნქცია $\delta^4(x-y)$

გ) 4-ინდექსიანი ანტისიმეტრიული ტენზორი $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

ზოგად კოორდინატთა გარდაქმნების დროს. შედეგი გამოსახეთ მეტრიკული ტენზორის დეტერმინანტის გამოყენებით.

II. კლასიკური ნაწილაკები და ველები

I. ნაწილაკები

1. შესავალი.

კლასიკურ არა-რელატივისტურ მექანიკაში ერთერთი პირველადი ცნებაა *ელემენტარული ფიზიკური ობიექტი* (*ეფო*) ან, სხვანაირად, მატერიალური წერტილი. ამ ცნების ქვეშ იგულისხმება სხეული, რომლის ზომებიც შეიძლება უგულებელვყოთ მოცემული მოძრაობის აღწერისას. ჩვენ გავავრცელებთ - რამდენად შესაძლებელია - ამ ცნებას რელატივისტური ნაწილაკებისთვისაც (თავი II) მაგრამ ზოგადად რელატივისტური თეორიის შემთხვევაში წინა პლანზე გამოდიან ველები, რადგან ჭარბი ენერგიების გამო ($E>>m, m$ – ნაწილაკის მასაა) ნაწილაკები კარგავენ საწყისს ინდივიდუალობას (გადადიან სხვა ნაწილაკებში), მათი რაოდენობა არ ინახება და შეუძლებელი ხდება მათი აღწერა წმინდა მექანიკური მიდგომის ჩარჩოებში (იხ. თავი III).

აქ ჩვენ საუბარი გვექნება კლასიკურ არა-რელატივისტურ მექანიკაზე ტრადიციულად განსაზღვრულს გალილეოს სივრცე-დროში (იხ. ნაწილი I), რომელშიც 3-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე სეპარირებულია დროსგან (ანუ როგორც ამბობენ, ჩვენ ვიმყოფებით (3+1)-განზომილებიან სივრცე-დროში). შესაბამისად ჩვენ ვიმუშავებთ ინერციულ ათვლის სისტემაში, ანუ ათვლის ისეთ სისტემაში სადაც *ეფო*-სათვის ეს სივრცე ერთგვაროვანი და იზოტროპიულია, დრო კი ერთგვაროვანი და, ამის გარდა, გადასვლა ერთი ათვლის სისტემიდან მეორეში ხდება გალილეოს გარდაქმნების საშუალებით (იხ. ნაწილი I, თავი I). ნებისმიერ ასეთ სისტემაში *ეფო*-ს მდგომარეობა სივრცე-დროში (მისი მდებარეობა და ევოლუცია) სრულად აღიწერება განზოგადებული კოორდინატებით და სიჩქარეებით (ან იმპულსებით) თუ ცნობილია შესაბამისი საწყისი და საზაზღვრო პირობები.

ჩვენ დავიწყებთ *ჰამილტონის მინიმალური ქმედების პრინციპით* რომ დავინახოთ ის ერთადერთი ბუნებრივი ტრაექტორია, რომელსაც *ეფო* უნიკალურად ირჩევს თავის მოძრაობის დროს. დავასახელებთ ამ *მოძრაობის ინტეგრალებს* და გამოვიყვანთ მათ სივრცე-დროის თვისებებიდან.

შევისწავლით *ეფო*-ს (და სხვა ფიზიკური სისტემების) *მოძრაობის განტოლებებს* ორი სხვადასხვა, *ლაგრანჟის* და *ჰამილტონის* ფორმალიზმის მიდგომაში. პირველ შემთხვევაში ეს იქნება მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებები, ხოლო მეორეში კი პირველი რიგის.

2. ქმედება და ლაგრანჟიანი.

ა) *მინიმალური ქმედების პრინციპი.*

ეს უნივერსალური პრინციპი, რომელიც პირველად იყო ჩამოყალიბებული ჰამილტონის მიერ, წარმოადგენს მექანიკური მოძრაობის ძირითად პოსტულატს:

ყოველი მექანიკური სისტემა ხასიათდება გარკვეული დროისა, კოორდინატებისა და სიჩქარეების ანალიზური ფუნქციით, რომელსაც ეწოდება ლაგრანჟიანის ფუნქცია ან *ლაგრანჟიანი*

$$L(x, \dot{x}, t) \tag{1}$$

და ამასთან თუ დროის $t = t_1$ და $t = t_2$ მომენტებში სისტემას უკავია განსაზღვრული მდებარეობები, რომლებიც ხასიათდება კოორდინატთა ორი კრებულით $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ მაშინ ამ მდებარეობებს შორის სისტემა მოძრაობს ისე, რომ ინტეგრალს

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt \tag{2}$$

რომელსაც *ქმედება* ეწოდება, აქვს მინიმალური (საერთოდ კი ექსტრემალური) მნიშვნელობა. ქმედება S ფუნქციონალია, რომელიც ზოგადად აღწერს სისტემის მოძრაობას ამ ორ მდებარეობას შორის უამრავი შესაძლო ტრაექტორიის გასწვრივ. მაგრამ *მინიმალური ქმედების პრინციპის* თანახმად ბუნება ირჩევს მათგან მხოლოდ ერთადერთს, სწორედ იმას რომელიც უზრუნველყოფს ქმედების მინიმალურობას.

ბ) *ლაგრანჟიანი და მოძრაობის განტოლებები.*

ლაგრანჟიანი, როგორც ავღნიშნეთ, კოორდინატის, სიჩქარის და დროის ფუნქციაა (1). ლაგრანჟიანი არ შეიცავს კოორდინატის უფრო მაღალ წარმოებულებს, თუმცა ეს არ არის აკრძალული ფიზიკის არც ერთი პრინციპით, გარდა ბუნებრივი სიმარტივისა. მართლაც, აღმოჩნდა რომ მექანიკური სისტემის

მდგომარეობა მთლიანად განისაზღვრება კოორდინატისა და სიჩქარის მოცემით და არ არის საჭირო უფრო მაღალი რიგის წარმოებულების განხილვა.

გამოვიყვანოთ ახლა ამ სისტემის (კერძოდ *ეფო*-ს) მოძრაობის განტოლება ჰამილტონის პრინციპზე დაყრდნობით. სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა *ეფო*-ს გააჩნია მხოლოდ ერთი თავისუფლების ხარისხი, რომელიც აღიწერება ერთი “მოძრავი” კოორდინატით x. ვთქვათ, $x=x(t)$ არის ის ფუნქცია რომლისთვისაც ქმედებას აქვს მინიმუმი. ანუ ნებისმიერი წანაცვლებული ფუნქციისათვის $x(t)+\delta x(t)$ ქმედება იზრდება. აქ $\delta x(t)$ ამ ფუნქციის ინფინიტიზემალური (ანუ უსასრულოდ მცირე) ვარიაციაა მთელს (t_1,t_2) ინტერვალში. რადგანაც დროის $t=t_1$ და $t=t_2$ მომენტებისათვის უნდა მივიღოთ შესაბამისად $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ მნიშვნელობები, ამიტომ

$$\delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0\,. \qquad (2')$$

ისევე როგორც ჩვეულებრივი ფუნქციისათვის მინიმალურობის აუცილებელი პირობა მისი პირველი წარმოებულის ნულთან ტოლობაა, S ქმედების (2) მინიმუმის არსებობის აუცილებელ პირობას წარმოადგენს მისი პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა, ანუ

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x},t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right)dt=0 \quad . \qquad (3)$$

თუ გავითვალისწინებთ ახლა, რომ $\delta\dot{x}=\dfrac{d}{dt}\delta x$ და მოვახდენთ მეორე წევრის ნაწილობით ინტეგრირებას, მივიღებთ

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt=0 \qquad . \qquad (3')$$

ამ გამოსახულებაში პირველი წევრი ინტეგრირების საზღვარებზე თანახმად (2’) ავტომატურად ქრება, ხოლო მეორედან - რადგანაც კოორდინატის ვარიაციის სიდიდე δx ნებისმიერია - ქმედების მინიმალურობის პირობის დასაკმაყოფილებლად აუცილებელია რომ სრულდებოდეს განტოლება

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \qquad . \tag{4}$$

ანუ ჩვენ მივიღეთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც ზოგადად *ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას* უწოდებენ.

ვთქვათ, ვიხილავთ არა ერთ ნაწილაკს არამედ s ნაწილაკთა სისტემას, რომელთა მდგომარეობის განსაზღვრისათვის უნდა მოცემულ იქნას $3s$ კოორდინატი (ვიხილავთ (3+1)-განზომილებიან გალილეის სივრცე-დროს). შესაბამისად სისტემის თავისუფლების ხარისხიც $3s$-ია. ზოგადად არ არის აუცილებელი რომ ყველა ეს სიდიდე იყოს დეკარტეს კოორდინატი - ამოცანის შესაბამისად ეს შეიძლება იყვნენ ნებისმიერი სხვა ტიპის კოორდინატები ან სულაც რაღაც ზოგადი მახასიათებლები. ნებისმიერ $3s$ სიდიდეს $q_1, q_2, \ldots, q_{3s}$, რომლებიც სრულად აღწერენ $3s$ თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემას, *განზოგადებული კოორდინატები* ეწოდებათ. შესაბამისად განზოგადებული კოორდინატების პირველი წარმოებულები $\dot{q}_i$ *განზოგადებული სიჩქარეებია.* განზოგადებული კოორდინატებისათვისა და სიქარეებისათვის ეილერ-ლაგრანჟის განოტოლება (4) ღებულობს სახეს $(i=1, 2, \ldots, 3s)$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad . \tag{4'}$$

ადვილად დასანახია რომ ლაგრანჟიანს განმარტებისამებრ გააჩნია შემდეგი თვისებები:

(i) თუ ლაგრანჟიანი აღწერს ორ დაშორებულ ნაწილაკს (ან სისტემას) A და B, რომლებიც არ ურთიერთქმედებენ ერთმანეთთან მაშინ მათი საერთო ლაგრანჟიანი არის ჯამი ლაგრანჟიანებისა, ანუ

$$L_{A+B}=L_A+L_B \tag{5}$$

ლაგრანჟიანის ადიტიურობის თვისება (8) გამოხატავს იმ ფაქტის, რომ ნაწილაკები A და B მოძრაობენ დამოუკიდებლად თუ ურთიერთქმედება მათ შორის არ არსებობს;

(ii) მთლიანი ლაგრანჟიანის გამრავლება ნებისმიერ არანულოვან რიცხვზე არ ცვლის მოძრაობის განტოლებებს;

(iii) ლაგრანჟიანის წანაცვლება კოორდინატებისა და დროის ნებისმიერი ფუნქციის სრული წარმოებულით არ ცვლის მოძრაობის განტოლებებს, რადგან ქმედების ვარიაციის დროს (**ის**. (3)) ეს სრული წარმოებული წვლილს არ იძლევა.

(iv) ლაგრანჟიანს აქვს მასის განზომილება იმ ერთეულთა სისტემაში, სადაც დროისა და სიგრძის ერთეულები უგანზომილებანი არიან და, შესაბამისად, ქმედებაც უგანზომილებოა.

მიუ**ხ**ედავად იმისა რომ მოძრაობის განტოლებების მიმართ ლაგრანჟიანი გამოიყურება გარკვეულ წილად როგორც დამ**ხ**მარე და კომპლემენტარული ცნება ზოგადად სწორედ მასშია წარმოდგენილი მთელი ინფორმაცია მექანიკური სისტემის ევოლუციის შესა**ხ**ებ – სიმეტრიები და მოძრაობის ინტეგრალები, დამატებითი კავშირები, რეალური და შესაძლო (ვირტუალური) ტრაექტორიები, ღია და ჩაკეტილი სისტემების თავისებურებანი და ა.შ.

გ) *__დინამიური სიდიდეები__*

მექანიკური მოძრაობის ძირითადი სიდიდეები, როგორიცაა *იმპულსი და ენერგია*, შეიძლება უშუალოდ გამოყვანილ იქნას ქმედებიდან (2) თუ მას განვი**ხ**ილავთ როგორც კოორდინატის და დროის ფუნქციას. ანუ მის ვარიაციის დროს (**ის**. (3')) კოორდინატის ვარიაციას საწყის t_1 მომენტში ავიღებთ ნულის ტოლად $\delta x(t_1)=0$, **ხ**ოლო t_2 მომენთში მივცემთ ზოგად არანულოვან მნიშვნელობას $\delta x(t_2)=\delta x$. მაშინ ზოგადად - ქმედების წარმოებულების სა**ხ**ით - შეიძლება შემოვიყვანოთ სიდიდეები

$$p=\frac{\partial S}{\partial x}\quad,\quad E=-\frac{\partial S}{\partial t} \tag{6}$$

რომლებსაც იმპულსს და ენერგიეს უწოდებენ.

ვიპოვოთ ა**ხ**ლა მათი გამოსა**ხ**ულებები ლაგრანჟიანის მეშვეობით. რადგან რეალური მოძრაობის ტრაექტიერია უნდა აკმაყოფილებდეს ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას ინტეგრალი ქმედების ვარიაციაში (3') შეიძლება ავიღოთ ნულის ტოლად და ამ გამოსა**ხ**ულების პირველი წევრიდან ვღებულობთ

$$p=\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\quad. \tag{6'}$$

შესაბამისი გამოსა**ხ**ულება ენერგიისათვის მიიღება თუ ავიღებთ ქმედებიდან სრულ წარმოებულს დროით

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial x}\dot{x} \qquad .$$

თუ გავიხსენებთ რომ ქმედების განმარტებისამებრ (2) მარცხენა მხარე ამ ტოლობაში ზუსტად უდრის ლაგრანჟიანს მივიღებთ წინა განტოლების (6’) გამოყენებით, რომ

$$E=-\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}-L \qquad . \qquad (6'')$$

განზოგადებულ კოორდინატებსა და სიჩქარეებში ეს სიდიდეები ჩაიწერება როგორც

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad , \qquad E_i=\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L \qquad (6''')$$

და ამ სახით წარმოდგენისას მათ უწოდებენ *განზოგადებულ იმპულსს და ენერგიას*. ჩვენ მალე დავინახავთ რომ ეს სიდიდეები არიან მექანიკური სისტემის მოძრაობის ძირითადი ინტეგრალები - მათი მკაცრი შენახვა გამომდინარეობს, შესაბამისად, სივრცისა და დროის ერთგვაროვნებიდან.

გავნმარტოდ ასევე *განზოგადებული ძალა,*

$$F_i=\dot{p}_i \qquad (7)$$

რომელიც მოძრაობის განტოლების (4’) გამოყენების შემდეგ აგრეთვე გამოისახება ლაგრანჟიანის საშუალებით როგორც

$$F_i=\frac{dp_i}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}\,. \qquad (7')$$

დ) *<u>მაგალითი (როგორ მუშაობს ჰამილტონის პრინციპი).</u>*

განვიხილოთ მარტივი საილუსტრაციო მაგალითი. ავიღოთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე *ეფო*. დავუშვათ რომ მის ლაგრანჟიანს აქვს სახე

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x) \qquad (8)$$

(ჩვენ მალე მართლაც დავრწმუნდებით რომ ერთნაწილაკოვან სისტემას რომელიც იმყოფება პოტენციურ $U(x)$ ველში შეესაბამება სწორედ ეს ლაგრანჟიანი, **იხ**. (14)).

გამოვიყენოთ შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება. თანა**ხ**მად ზოგადი განტოლებისა (4) , გვექნება

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \tag{9}$$

ე.ი. ვღებულობთ ნიუტონის მეორე კანონს, თუ m პარამეტრს ლაგრანჟიანში (8) გავაიგივებთ *ეფო*-ს მასასთან.

3. ნაწილაკის მოძრაობა.

ა) *<u>სივრცე-დროის თვისებები და ნიუტონის პირველი კანონი</u>*.

განვიხილოთ თავისუფლად მოძრავი *ეფო* (ვთქვათ, ელემენტარული ნაწილაკი) ათვლის ინერციულ სისტემაში, რომლის მიმართ, როგორც ავღნიშნეთ, სივრცე არის ერთგვაროვანი და იზოტროპული, დრო კი ერთგვაროვანი.

სივრცისა და დროის ერთგვაროვნებიდან გამომდინარე ამ ობიექტის ლაგრანჟიანი არ შეიძლება იყოს დამოკიდებული სივრცულ კოორდინატაზე ან დროზე ცხადად, რადგან კოორდინატისა და დროის წანაცვლებისას ლაგრანჟიანი უნდა რჩებოდეს უცვლელი:

$$L(\vec{x}+\vec{x}_0,\ \dot{\vec{x}},\ t+t_0) \quad \Rightarrow \quad L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) \ .$$

ამრიგად თავისუფალი ეფო-ს ლაგრანჟიანი მხოლოდ სიჩქარის ფუნქცია უნდა იყოს, $L = L(\dot{\vec{x}})$. ამავდროულად სივრცის იზოტროპიულობიდან გამომდინარე იგი არ შეიძლება იყოს დამოკიდებული არც სიჩქარის მიმართულებაზე, ე.ი. იგი მხოლოდ სიჩქარის მოდულის $|\dot{\vec{x}}|$ ფუნქციაა. თუ ამასთან ერთად გავითვალისწინებთ, რომ ზოგადად ლაგრანჟიანი თავისი ცვლადების ანალიზური ფუნქციაა მაშინ ის უნდა იყოს ამ სიჩქარის კვადრატზე დამოკიდებული,

$$L = L(\dot{\vec{x}}^2) \quad . \tag{10}$$

ამასთან, თუ ჩავსვამთ ამ ლაგრანჟიანს მოძრაობის განტოლების (4) 3-განზომილებიან გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad L'\cdot \ddot{\vec{x}} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{x}} = const \tag{11}$$

სადაც L' ნიშნავს $\partial L/\partial(\dot{\vec{x}}^2)$ და, რადგან ეს წარმოებული სიჩქარის კვადრატის მიმართ ზოგადად ნულის ტოლი არ არის, მივდივართ დასკვნამდე რომ მაშინ აჩქარება უნდა იყოს ნული, ანუ *ეფო*-ს სიჩქარე $\vec{v} \equiv \dot{\vec{x}}$ იყოს კონსტანტა.

ამრიგად, მივიღეთ რომ ათვლის ინერციულ სისტემაში ყოველი თავისუფალი მოძრაობა ხდება მუდმივი მიმართულების და სიდიდის სიჩქარით, რაც *ნიუტონის ინერციის კანონის* შინაარს წარმოადგენს.

ბ) *ინვარიანტობა ჰალილეის გარდაქმნების მიმართ და ეფო-ს ლაგრანჟიანი.*

განვიხილოთ თავისუფლად მოძრავი *ეფო*-ს ლაგრანჟიანისთვის (10) ჰალილეის გარდაქმნები

$$\dot{\vec{x}} \to \dot{\vec{x}} + \vec{\varepsilon} \qquad (12)$$

ათვლის K სისტემიდან K' სისტემაში, რომელიც მოძრაობს K სისტემის მიმართ უსარულო მცირე ფარდობითი სიჩქარით $\vec{\varepsilon}$. ლაგრანჟიანის ინვარიანტობა ამ გარდაქმნების მიმართ ნიშნავს რომ ის ან უცვლელი უნდა დარჩეს ან შეიძლება შეიცვალოს მხოლოდ რაიმე ფუნქციის სრული წარმოებულით, რაც, როგორც ვიცით (იხ. ზემოთ ლაგრანჟიანის თვისება (**iii**)) არ შეცვლის ეფო-ს მოძრაობის განტოლებას. ეფო-ს წანაცვლებული სიჩქარის (12) ჩასმა ლაგრანჟიანში (10) და მისი ტეილორის მწკრივად დაშლა გვაძლევს - $\vec{\varepsilon}$-ის მიმართ პირველი რიგის წევრების სიზუსტით - შემდეგ გამოსახულებას

$$L((\dot{\vec{x}} + \vec{\varepsilon})^2)) \;=\; L(\dot{\vec{x}}^2) + \frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec{x}}^2)} 2(\dot{\vec{x}}\vec{\varepsilon}) + O\left(\varepsilon^2\right) \quad .$$

ამ გამოსახულებაში მეორე წევრი იქნება სრული წარმოებული მხოლოდ ერთადერთ შემთხვევაში თუ მასში მყოფი კერძო წარმოებული არის კონსტანტა, ანუ

$$\partial L / \partial(\dot{\vec{x}}^2) = m^2/2$$

სადაც ჩვენ გავითვალისწინეთ რომ ამ კონსტანტას უნდა ჰქონდეს მასის განზომილება (იმ ერთეულთა სისტემაში სადაც ქმედება უგანზომილებოა). ამ განტოლების ინტეგრირების შედეგად საბოლოოდ ვღებულობთ რომ ჩვენ ლაგრანჟიანს უნდა ჰქონდეს სახე

$$L = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} \qquad (13)$$

რომელშიც ინტეგრირების კონსტანტა აღებულია ნულად, რადგან ასეთი კონსტანტის არსებობა არ ცვლის მოძრაობის განტოლებებს, და ესე იგი მას ფიზიკური აზრი არ აქვს. ავღნიშნოთ ასევე რომ ლაგრანჟიანში (13) შემავალი m პარამეტრი მართლაც ნაწილაკის მასაა, რადგან სწორეთ ასე განსაზღვრული მასა შეესაბამება ნიუტონის მეორე კანონს (9). ის აუცილებლად უნდა იყოს

დადებითი $(m > 0)$ რომ ქმედება ვარიაციის შედეგად არჩეული ტრაექტორიის გასწვრივ ღებულობდეს სწორედ მინიმალურ და არა მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

გ) *ლაგრანჟიანი ურთიერთქმედი ნაწილაკებისთვის. ნიუტონის მეორე კანონი.*

ახლა ვნახოთ როგორ გამოიყურება ლაგრანჟიანი ურთიერთქმედი ნაწილაკისათვის. ვთქვათ გვაქვს n ნაწილაკოვანი სისტემა. ლაგრანჟიანის ადიტიურობის თვისების გამო (იხ. ზემოთ (5)), თუ ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება არ არსებობს მას ექნება სახე

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \dot{\vec{x}}_i^2}{2} \quad .$$

ურთიერთქმედების შემთხვევაში კი, თუ ეს ურთიერთქმედება აღიწერება მხოლოდ ნაწილაკთა კოორდინატების ფუნქციით $-U(x)$, ამ სისტემის სრულ ლაგრანჟიანს ექნება სახე

$$L = \sum_{i} \frac{m_i \dot{\vec{x}}_i^2}{2} - U(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots) \tag{14}$$

საიდანაც i-ური ნაწილაკისთვის შესაბამისი მოძრაობის განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ განტოლებას

$$m \ddot{\vec{x}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \quad . \tag{15}$$

ნაწილაკზე მომქმედი ძალისა (იხ. (7'))

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \tag{7''}$$

და მის აჩქარებას შორის. ეს კი, როგორც მიხვდით, *ნიუტონის მეორე კანონია.*

ავღნიშნოთ რომ პირველ წევრს ლაგრანჟიანში (14) უწოდებენ კინეტიკურ ენერგიას T, ხოლო მის მეორე წევრს პოტენციურ ენერგიას U, ასე რომ ლაგრანჟიანი ზოგადად კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების სვაობაა. ნიშანი "-" U-ს წინ შერჩეულია ისე რომ ძალა ნიუტონის კანონში (15) იყოს დაკავშირებული პოტენციალის შემცირებასთან (უარყოფითი გრადიენტი) და არა

მის ზრდასთან, თუმცა ეს არჩევანი პირობითია და შესაძლებელია ძალის საწინაღმდეგო ნიშნინითაც განმარტება.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია, რომ მიუხედავად იმისა რომ ჩვენ აქამდე ვსაუბრობდით მხოლოდ დროის ერთგაროვნებაზე, აღმოჩნდა რომ ის ასევე იზოტროპულიცაა, ანუ მისი თვისებები ორივე მიმართულებით (წარსული-მომავალი) მექანიკური სისტემებთან მიმართებაში ეკვივალენტურია. მართლაც, ადვილად დავინახავთ რომ ჩვენი ლაგრანჟიანი (14) და მოძრაობის განტოლებები (15) დროის არეკვლის ($t \to -t$) მიმართ ინვარიანტულები არიან. ეს კი ნიშნავს რომ ნებისმიერი მოძრაობა კლასიკურ მექანიკაში შექცევადია – თუ არსებობს გარკვეული მოძრაობა არსებობს მის მიმართ დროში შებრუნებულიც.

4. სიმეტრიები და შენახვის კანონები.

დავაკვირდეთ ახლა უფრო ზუსტად იმ სიმეტრიებს, რომლებიც ზოგადად გააჩნია ლაგარანჟიანს და მივიღოთ მათთან დაკავშირებული შენახვის კანონები. სივრცისა და დროის ერთგვაროვნება და იზოტროპიულობა გვაძლევს არა მარტო შესაძლებლობას დავადგინოთ ლაგრანჟიანის სახე, არამედ მივიღოთ ის კონკრეტული შენახვადი სიდიდეებიც, ე.წ. *მოძრაობის ინტეგრალები*, რომლებიც დაკავშირებულია ამა თუ იმ ლაგრანჟიანთან. ეს ფუნდამენტური კავშირი ლაგრანიანის სიმეტრიებსა და შესაბამის შენახვის კანონებს შორის დამყარებულია ემი ნიოტერის ცნობილ თეორემაზე.

ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ ზოგად ლაგრანჟიანს L , რომელიც აღწერს მრავალნაწილიკოვან სისტემას განზოგადოებილი კოორდინატებისა q_i და სიჩქარეები $\dot{q}_i$ საშუალებით ($i = 1, 2, ...$).

ა) *მოძრაობის ინტეგრალი დაკავშირებული დროსთან - ენერგია*.

ამ მოძრაობის ინტეგრალის არსებობა გამოწვეულია დროის ერთგვაროვნებით. რადგან - აქედან გამომდინარე - ლაგრანჟიანი არ უნდა შეიცავდეს დროს ცხადი სახით, მისი დროით სრული წარმოებული იქნება

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

რაც ნიშნავს რომ ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდე მუდმივია. ამ სიდიდეს *სისტემის სრული ენერგია* ეწოდება

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = const \qquad (16)$$

იგი მექანიკური სისტემის მოძრაობის ძირითადი ინტეგრალია. ასეთ სისტემებს რომელთა სრული ენერგია ინახება *კონსერვატულ სისტემებს* უწოდებენ. თუ გამოვიყენებთ ამ გამოსახულებას (16) *ეფო*-ს ლაგრანჟიანის (14) კერძო შემთხვევისათვის მივიღებთ რომ

$$E = T + U$$

ანუ ეფო-ს სრული ენერგია მისი კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამია.

ბ) *მოძრაობის ინტეგრალები დაკავშირებული სივრცესთან*.

ეს მოძრაობის ინტეგრალები დაკავშირებულია სივრცის ერთგვაროვნებასა და იზოტროპულობასთან. ვთქვათ გვაქვს წანაცვლება განზოგადებული კოორდინატებისათვის და შესაბამისად განზოგადებული სიჩქარეებისთვისაც

$$q_i \to q_i + \varepsilon\, f_i \quad , \qquad \dot{q}_i \to \dot{q}_i + \varepsilon\, \dot{f}_i \tag{17}$$

სადაც ε მცირე (ინფინიტიზემალური) მუდმივი პარამეტრია. ლაგრანჟიანის ცვლილება ამ გარდაქმნების შედეგად იქნება

$$\begin{aligned} L' - L &= L'\left(q_i + \varepsilon\, f_i, \dot{q}_i + \varepsilon\, \dot{f}_i, t \right) - L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \varepsilon \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{f}_i \right] + O(\varepsilon^2) = \\ &= \varepsilon \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{f}_i \right] = \varepsilon\, \frac{d}{dt}\left(\sum_i f_i p_i \right) \quad . \end{aligned} \tag{18}$$

ლაგრანჟიანის ინვარიანტობა გარდაქმნების (16) მიმართ ითხოვს რომ ეს ცვლილება (18) ნულის ტოლი უნდა იყოს, ანუ სიდიდე

$$\sum_i f_i\, p_i = const \tag{19}$$

კონსტანტაა და ე.ი. ის მოძრაობის ინტეგრალი უნდა იყოს.

განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა:

(i) ვთქვათ სისტემა წავანაცვლეთ ერთი და იგივე რადიუს-ვექტორით $f_i = an_i$, სადაც n_i=(1,1,1) ერთეულოვანი ვექტორია. მაშინ რადგან ზოგადად სიდიდე a ნულისაგან განსხვავებულია ვღებულობთ *სრული იმპულსის შენახვის კანონს*

$$P = \sum_i p_i = const \tag{20}$$

.

(ii) თუ ახლა $f_i = \varepsilon_{ijk} x_j a_k$, სადაც a_k ნებისმიერი არანულოვანი პარამეტრებიაა, მივიღებთ *სრული მომენტის შენახვის კანონს*:

$$a_k \sum_i \varepsilon_{ijk} x_j p_i = const \quad \rightarrow \quad M = \sum_k M_k = const \tag{21}$$

სადაც $M_k = \varepsilon_{ijk} x_j p_i$ ერთერთი ნაწილაკის მომენტია.

დავაზუსტოთ რომ ყოველ განზოგადებულ კოორდინატს რომელიც არ შედის ლაგრანჟიანში ცხადი სახით *ციკლური კოორდინატი* ეწოდება. ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლების (იხ. (4')) თანახმად შესაბამისი კოორდინატისათვის q_i გვაქვს

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

საიდანაც ვღებულობთ რომ მასთან შეუღლებული განზოგადებული იმპულსი (5) ყოველთვის მოძრაობის ინტეგრალია.

5. მოძრაობის განტოლებების ამოხსნა.

ა) *იდეა: შენახვის კანონების გამოყენება*.

მოძრაობის ინტეგრალების არსებობა ბევრ შემთხვევაში იძლევა საშუალებას გავაკეთოთ მთელი რიგი ამომწურავი დასკვნებისა სისტემის მდგომარეობის შესახებ, თუ ცნობილია ამ სისტემის მდგომარეობა საწყის დროის მომენტში. ამრიგად მეორე რიგის დიფერენციალური ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებების მირდაპირი ამოხსნა აღარ არის აუცილებელი. ქვემოთ ამ იდეის ილუსტრაციის მიზნით განვიხილავთ ნაწილაკის *1-განზომილებიან მოძრაობას* და მის *მოძრაობას ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში.*

ბ) *1-განზომილებიანი მოძრაობა*.

როგორც ვნახეთ ეს მოძრაობა აღიწერება ლაგრანჟიანით (14), რომელსაც 1-განზომილებიან მოძრაობის შემთხვევაში ექნება სახე

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x).$$

ამ ლაგრანჟიანთან დაკავშირებული ძირითადი მოძრაობის ინტეგრალი ნაწილაკის სრული ენერგიაა

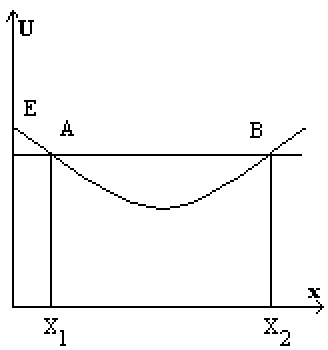
$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

რაც თავისთავად წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას x კოორდინატის მიმართ

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}\ .$$

ცვლადთა განცალებით მივიღებთ ამონახსნს დროისათვის

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+const \qquad (22)$$



სადაც კონსტანტის პოვნა შეიძლება ამოცანის საწყისის პირობებიდან. ამასთან, რადგანაც კინეტიკური ენერგია (ფესვის ქვეშ) არსებითად დადებითი სიდიდეა, მოძრაობა შესაძლებელია სივრცის მხოლოდ იმ არეში სადაც $U(x)<E$. როგორც ჩანს მარცხენა ნახაზიდან მოძრაობა ხდება მხოლოდ AB უბანში, თუ შესაბამისს წერტილებში A და B (რომლებსაც უწოდებენ *გაჩერების ან მობრუნების წერტილებს*) $U(x)=E$. ეს ე.წ. *ფინიტური* მოძრაობაა. პირიქით, თუ მოძრაობის არე შეუზღუდავია ან შემოსაზღვრულია ერთი მხრიდან და ნაწილაკს აქვს უსასრულობაზე გასვლის შესაძლებლობა მაშინ მოძრაობა *ინფინიტურია.* ერთგანზომილებიანი ფინიტური მოძრაობა ფაქტობრივად რხევითია - ნაწილაკი ასრულებს პერიოდულად განმეორებად მოძრაობას ორ სასაზღვრო წერტილს შორის. ამ ოსცილიაციის პერიოდი პირდაპირ გამოითვლება ფორმულით (22) ინტეგრალში შესაბამისი ზღვრების მინიშნებით.

გ) *მოძრაობა ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში*.

განვიხილოთ შემთხვევა როცა ნაწილაკი მოძრაობს ნებისმიერ ცენტრალურ ველში. მივიღოთ სიმარტივისთვის, რომ ეს მოძრაობა 2-განზომილებიანია, ანუ მოძრაობა ხდება სიბრტყეში (იხ. ამოცანა 7). ამ შემთხვევაში გვექნება ორი მოძრაობის ინტეგრალი, ნაწილაკის ენერგია E და მომენტი M,

$$E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)+U(r)$$

$$M=mr^2\dot{\varphi} \qquad (23)$$

სადაც ორივე გამოსახულება ჩაწერილია პოლარულ კოორდინატებში. ამოვხსნათ ეს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა რადიუს-ვექტორისა r და პოლარული კუთხის φ მიმართ. ვღებულობთ (მეორე განტოლების პირველში ჩასმით და შემდგომ ცვლადების განცალებით და უშუალო ინტეგრირებით) ამონახსნებს დროისთვის t

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} \tag{24}$$

და კუთხისათვის φ (ანუ მოძრაობის ტრაექტორიისათვის)

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}\, dr}{\sqrt{2m\left(E - U(r)\right) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{25}$$

(ინტეგრირების კონსტანტები განულებულია სპეციალურად შერჩეული საწყისი პირობებით).

ადვილად დასანახია რომ დროის ამონახსნი (24) პრაქტიკულად ემთხვევა ერთგანზომილებიანი მოძრაობის ამონახსნს (22). ანუ მოძრაობის რადიალური ნაწილი ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში შეიძლება განვიხილოთ როგორც 1-განზომილებიანი მოძრაობა პოტენციური ენერგიით

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

სადაც $\frac{M^2}{2mr^2}$ წევრს *ცენტრგამშორი ენერგია* ეწოდება. დამოკიდებული სრული (E) და ეფექტური პოტენციური (U_{eff}) ენერგიების შეფარდებაზე ჩვენ, ისევ როგორც 1-განზომილებიანი მოძრაობის დროს, გვაქვს ინფინიტური ($E > U_{eff}$) ან ფინიტური ($E = U_{eff}$) მოძრაობა. ამ შემთხვევაში პერიოდული ფინიტური მოძრაობა ნიშნავს ორბიტალურ მოძრაობას თუ მის საწყისს პოტენციალს აქვს ყველასთვის ცნობილი სახე $U(r) = 1/r$ (ამოცანა 8).

6. ჰამილტონიანი.

ლაგრანჟის ფორმალიზმში მექანიკური სისტემის მდგომარეობის აღწერა ხდება განზოგადებული კოორდინატებით და სიჩქარეებით. მაგრამ შესაძლებელია ამ მდგომარეობის აღწერა განზოგადებული კოორდინატებისა და იმპულსების საშუალებით, რაც რიგ შემთხვევებში ძალიან მოსახერხებელია. როგორც დავინახავთ თუ ლაგრანჟის ფორმალიზმში გვაქვს n ცალი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება ამ ალტერნატიულ არწერაში, რომელსაც *ჰამილტონის ფორმალიზმს* უწოდებენ, მივიღებთ $2n$ ცალ პირველი რიგის განტოლებას.

ა) *ჰამილტონისა და ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები*.

გადასვლა ერთი განზოგადებული ცვლადთა სისტემიდან მეორეზე ზოგადად ხორციელდება ე.წ. *ლეჟანდრის გარდაქმნებით*, რომლებიც ჩვენ შემთხვევაში - ლაგრანჟის ცვლადებიდან $(q,\dot{q}_i)$ ჰამილტონის ცვლადებზე (q,p_i) გადასვლისას - შემდეგში მდგომარეობენ:

$$dL=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i=\sum_i\dot{p}_i\,dq_i+\sum_i p_i d\dot{q}_i=\sum_i\dot{p}_i\,dq_i+d\Big(\sum_i p_i\,\dot{q}_i\Big)-\sum_i\dot{p}_i\,dq_i\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad d\Big(\sum_i p_i\,\dot{q}_i-L\Big)=-\sum_i\dot{p}_i\,dq_i+\sum_i\dot{p}_i\,dq_i$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ განზოგადებული იმპულსის განსაზღვრება (6’’’). ბოლო ფორმულაში დიფერენციალის ქვეშ მდგომი სიდიდე წარმოადგენს სისტემის ენერგიას, რომელსაც კოორდინატებითა და იმპულსებით გამოსახულს ეწოდება *ჰამილტონის ფუნქცია* ან *ჰამილტონიანი*

$$H(p,q,t)=\sum_i p_i\,\dot{q}_i-L\quad. \tag{26}$$

ჰამილტონიანის სრული დიფერენციალისთვის გვაქვს

$$dH=-\sum_i\dot{p}_i\,dq_i+\sum_i\dot{q}_i\,dp_i$$

რასაც საბოლოო ჯამში მივყევართ *ჰამილტონის კანონიკური* განტოლებების სისტემამდე

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad\qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad . \tag{27}$$

ეს განტოლებები იმ შემთხვევაში, როცა შესაძლებელია ლეჟანდრის გარდაქმნები (ანუ შესაძლებელია განზოგადებული სიჩქარეებიდან განზოგადებულ იმპულსებზე გადასვლა, **იხ**. ზემოთ განტოლებები (6’’’)), წამოადგენენ მექანიკური სისტემის არწერის ალტერნატიულ შესაძლებლობას - ისეთივე სრულს როგორსაც იძლევიან ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები, მაგრამ რიგ შემთხვევაში უფრო მარტივს, რადგან ჰამილტონის განტოლებები, როგორც ვხედავთ, პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები არიან (**იხ**. ამოცანა 10).

თუ გამოვიყენებთ ახლა კავშირს (6’’) ენერგიასა და ქმედებას შორის და გამოვსახავთ ენერგიას კოორდინატებისა და იმპულსების საშუალებით მივიღებთ ახალ განტოლებას ჰამილტონიანსა და ქმედებას შორის

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \tag{28}$$

და ბოლოს, თუ ამ განტოლებაში შევცვლით თანახმად (6) იმპულსებს ქმედების წარმოებულებით, მივიღებთ ე.წ. *ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას* – პირეველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i},\ t\right) \tag{29}$$

რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ქმედების ფუნქცია $S(q,t)$. თავსუფალი ნაწილაკისთვის

$$L = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} \quad \rightarrow \quad H = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{30}$$

ამ განტოლებას, ზემოთმოყვანილი განტოლება (6)-ის თანახმად, აქვს განსაკუთრებით მარტივი სახე

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \quad . \tag{31}$$

ძოგადად, ჰამილტონ-იაკობის განტოლება, რომელშიც დამოუკიდებელი ცვლადები არიან მხოლოდ კოორდინატები და დრო წარმოადგენს კლასიკური

მექანიკის კიდევ ერთ – დამატებით ეილერ-ლაგრანჟისა და ჰამილტონის განტოლებებთან – აღწერის შესაძლებლობას. ამ მიდგომის ფორმულირება ისეთი უნივერსალური ცნების საშუალებით როგორიცაა ქმედება განაპირობებს მის ეფექტურ გამოყენებას ფიზიკის სხვა დარგებშიც

ბ) ***პუასონის ფრჩხილები***.

ვთქვათ $f(p,q,t)$ არის განზოგადებული კოორდინატებისა და იმპულსების, და დროის რაიმე ფუნქცია. განვიხილოთ მისი დროით სრული წარმოებული

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}$$

სადაც შემოყვანილია აღნიშვნა

$$\{Hf\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \tag{32}$$

ამ გამოსახულებას *პუასონის ფრჩხილები* ეწოდება, ჰამილტონიანს კი ამ კონტექსტში შეიძლება დავარქვათ *ევოლუციის ოპერატორი.* მართლაც, პირობა იმისა რომ ფუნქცია f იყოს მოძრაობის ინტეგრალი არის

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\} = 0 \tag{33}$$

ანუ ამ ფუნქციის ევოლუციას დროში განსაზღვრავს მისი პუასონის ფრჩხილი სისტემის ჰამილტონიანთან.

კოორდინატებისა და იმპულსებისათვის სამართლიანია შემდეგი პუასონის ფრჩხილები:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \qquad \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \tag{34}$$

სპეციალურად აღსანიშნავია, რომ განტოლებები (32-34) ქმნიან გარკვეულ "ხიდს" კლასიკურსა და კვანტურ მექანიკებს შორის. კვანტურ მექანიკაში *პუასონის ფრჩხილების* როლს თამაშობენ *კომუტატორები* ამ სიდიდეებს შორის.

ამოცანები.

1. აჩვენეთ, რომ ლაგრანჟიანში დროის სრული წარმოებულის არსებობა არ ცვლის მოძრაობის განტოლებებს.

2. იპოვეთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები იმ შემთხვევისათვის როცა ლაგრანჟიანი შეიცავს დროით მაღალი რიგის წარმოებულებს:

$$L = L\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(k)} \right)$$

3. იპოვეთ ლაგრანჟიანის სახე, რომელიც შეესაბამება არისტოტელეს მოძრაობის განტოლებას

$$m\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

4. განსაზღვრეთ თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟიანის სახე სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემებში (დეკარტეში, ცილინდრულში, სფერულში და განზოგადებულში).

5. აჩვენეთ, რომ $L = \frac{m\dot{x}_i^2}{2} - V(x)$ და $H = \frac{p_i^2}{2m} + V(x)$ მივყავართ ერთი და იგივე მოძრაობის განტოლებამდე.

6. იპოვეთ ჰამილტონიანის სახე სხვადასხვა კოორდინატულ სისტემებში (დეკარტულში, ცილინდრულში და სფერულში).

7. განიხილეთ ნაწილაკის 3-განზომილებიანი მოძრაობა ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში. აჩვენეთ, რომ იგი არ განსხვავდება 2-განზომილბიანი მოძრაობისაგან, რომელიც განხილულია ლექციების ტექსტში (5-გ). ახსენით ამის მიზეზი და იპოვეთ დამატებითი მოძრაობის ინტეგრალი 3-განზომილებიანი მოძრაობის დროს.

8. აჩვენეთ რომ ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში პერიოდული მოძრაობა ნიშნავს ორბიტალურ მოძრაობას თუ პოტენციალს აქვს ყველასათვის კარგად ცნობილი სახე $U(r) = 1/r$.

9. $L = p_i \dot{x}_i - \frac{p_i^2}{2m} \; V(x)$, სადაც x_i, $\dot{x}_i$ და p_i დამოუკიდებელი ცვლადებია. აჩვენეთ, რომ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები მოგვცემენ ჰამილტონის განტოლებებს.

10. აჩვენეთ, რომ

$$\{p_i\, q_k\} = \delta_{ik}$$
$$\{M_i\, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k$$
$$\{M_i\, P_j\} = -\varepsilon_{ijk} P_k$$

11. დაამტკიცეთ, რომ სამი ფუნქციის პუასონის ფრჩხილისათვის სამართლიანია იაკობის იგივეობა:

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0$$

12. დაწერეთ ნაწილაკის ლაგრანჟიანი, რომელიც განიცდის მცირე 1-განზომილებიან რხევებს და ამოხსენით მისი მოძრაობის განტოლება. იპოვეთ ამ რხევების ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა, თუ ცნობილია ამ ნაწილაკის საწყისი კოორდინატა x_0 და სიჩქარე v_0.

II. ნაწილაკები: რელატივისტური თეორია.

1. ლორენცისა და პუანკარეს სიმეტრია.

ა) *მეტრიკა და ინტერვალი.*

განსხვავებით არა-რელატივისტური კლასიკური მექანიკისაგან, სადაც სივრცე და დრო პრინციპულად განცალკევებულია ფარდობითი სივრცისა და აბსოლუტური დროის სახით, ნაწილაკების რელატივისტური თეორია დაფუძვნებულია დრო-სივრცის ერთიან მრავალნაირობაზე, რომელიც მის ოთხივე განზომილებას ანიჭებს პრინციპულად ფარდობით ხასიათს. ეს მრავალნაირობა წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს, რომელსაც უწოდებენ მინკოვსკის სივრცე-დროს.

როგორც ვიცით (იხ. ნაწილი I) მეტრიკულ ტენზორს მინკოვსკის სივრცე-დროში აქვს სახე

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{1}$$

შესაბამისად ინტერვალი ორ ხდომილებას შორის ამ სივრცე-დროში განმარტებულია როგორც სიდიდე

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2}$$

ინვარიანტული საკუთარი *იზომეტრიის ჯგუფის* მიმართ (იხ. ქვემოთ).

ბ) *ლაბორატორული და საკუთარი დრო.*

დაუშვათ, რაღაც ათვლის ინერციული სისტემიდან ვაკვირდებით ჩვენს მიმართ ნებისმიერად მოძრავ საათს. ყოველ დროის მომენტში ეს მოძრაობა შეიძლება ჩავთვალოთ თანაბარ მოძრაობათ და შემოვიყვანოთ ამ საათთან უძრავად დამაგრებული ათვლის სისტემა. ეს სისტემაც დროის ყოველ მომენტში იქნება ინერციული. დროს რომელიც აითვლება მოცემულ ობიექტთან ერთად მოძრავ საათზე ეწოდება ამ *ობიექტის საკუთარი დრო* τ განსხვავებით იმ *ლაბორატორულ დროსთან* t, რომელსაც აჩვენებს საათი პირველ (უძრავ) სისტემაში. რადგან ინტერვალი (2) ინვარიანტული სიდიდეა მისი გამოსახულებისათვის ორივე სისტემაში გვაქვს ტოლობა

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\tau^2 \qquad (2')$$

და აქედან ვღებულობთ

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad v^2 \equiv \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \qquad (3)$$

ან სასრული დროის შუალედებისთვის –

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (3')$$

ანუ მოძრავი ობიექტის საკუთარი დრო ყოველთვის ნაკლებია დროის შესაბამის შუალედზე უძრავ სისტემაში ან სხვა სიტყვებით, მოძრავი საათი ყოველთვის ჩამორჩება უძრავს (ან კიდევ - საკუთარი დრო ნაკლებია ლაბორატორულ დროზე).

განმარტებისამებრ საკუთარი დრო (3) ინვარიანტული სიდიდეა. ამასთან, დროის შუალედი, რომელსაც აჩვენებს საათი არის ინტეგრალი

$$\tau = \frac{1}{c}\int ds \qquad (4)$$

აღებული ამ საათის მსოფლიო წირის გასწვრივ. თუ საათი უძრავია, მისი მსოფლიო წირი იქნება დროის ღერძის პარალელური წრფე; ხოლო თუ საათი ასრულებს არათანაბარ მოძრაობას რაიმე ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ და

ბრუნდება საწყის წერტილში, მაშინ მისი შესაბამისი მსოფლიო წირი იქნება მრუდი გამავალი უძრავი საათის მსოფლიო წირის ორ წერტილზე, რომლებიც შეესაბამებიან მოძრაობის დასაწყისს და ბოლოს. მეორეს მხრივ რადგანაც უძრავი საათი ყოველთვის გვიჩვენებს უფრო დიდ დროის შუალედს, ვიდრე მოძრავი, ამიტომ ინტეგრალს (4) აღებულს ორ მოცემულ მსოფლიო წერტილს შორის ექნება მაქსიმუმი, როცა იგი აიღება ამ წერტილების შემაერთებელი წრფივი მსოფლიო წირის გასწვრივ (!) .

ბ) *სივრცე-დროის იზომეტრია - ლორენცის გარდაქმნები.*

მინკოვსკის სივრცის-დროის ბუნებრივ *იზომეტრიის ჯგუფს* - ანუ გარდაქმნების ჯგუფს, რომლის მოქმედების შედეგად სივრცის მეტრიკა (1) არ იცვლება - წარმოადგენენ ლორენცის გარდაქმნები (ნაწილი I, თავი I) . როგორც ვიცით, 4-კოორდინატისათვის ან რაიმე სხვა ვექტორისათვის მათ აქვთ სახე

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} \tag{5}$$

სადაც $\Lambda^{\mu'}_{\mu}$ შესაბამისი გარდაქმნების მატრიცებია. ზოგადი სახის ლორენცის გარდაქმნები შედგება სამი სივრცული ღერძის გარშემო ბრუნვისაგან და სამი ბუსტისაგან.

სივრცეში ნებისმიერი მობრუნება შეიძლება დავშალოთ 12, 13 და 23 სიბრტყეებში ბრუნვებად. შესაბამისი Λ მატრიცები იქნება:

$$\Lambda(12)^{\mu'}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_{12} & \sin\vartheta_{12} & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta_{12} & \cos\vartheta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6ა}$$

$$\Lambda(13)_{\mu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_{13} & 0 & \sin\vartheta_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\vartheta_{13} & 0 & \cos\vartheta_{13} \end{pmatrix} \qquad (6\text{ბ})$$

$$\Lambda(23)_{\mu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta_{23} & \sin\vartheta_{23} \\ 0 & 0 & -\sin\vartheta_{23} & \cos\vartheta_{23} \end{pmatrix} \qquad (6\text{გ})$$

მათთან განსხვავებით, ბუსტები მოქმედებენ 01, 02 და 03 სიბრტყეებში და მათ მატრიცებს აქვთ სახე:

$$\Lambda(01)_{\mu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} ch\alpha_{01} & -sh\alpha_{01} & 0 & 0 \\ -sh\alpha_{01} & ch\alpha_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7\text{ა})$$

$$\Lambda(02)_{\mu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} ch\alpha_{02} & 0 & -sh\alpha_{02} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sh\alpha_{02} & 0 & ch\alpha_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7\text{ბ})$$

$$\Lambda(03)^{\mu'}_{\mu} = \begin{pmatrix} ch\alpha_{03} & 0 & 0 & -sh\alpha_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sh\alpha_{03} & 0 & 0 & ch\alpha_{03} \end{pmatrix} \tag{7გ}$$

სადაც

$$sh\alpha_{0i} = \frac{v_{0i}/c}{\sqrt{1-\frac{v_{0i}^2}{c^2}}} \qquad\qquad ch\alpha_{0i} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{0i}^2}{c^2}}}$$

როგორც ვიცით, ჰიპერბოლურ სინუსს და კოსინუს წარმოადგენენ ($i=1,2,3$).

ამ გარდაქმნების ჯგუფს, ანუ ე.წ. *ლორენცის ერთგვაროვან ჯგუფს*, შეიძლება 4-ტრანსლიაციებიც $x^{\mu'} = x^{\mu} + a^{\mu}$ დაუმატოთ. მაშინ მივიღებთ იმას, რასაც უწოდებენ *ლორენცის არაერთგვაროვან ჯგუფს* ანუ *პუანკარეს ჯგუფს*

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu'} x^{\mu'} + a^{\mu} \tag{5'}$$

ეს 10 პარამეტრიანი (3 ბრუნვა, 3 ბუსტი, 4 ტრანსლიაცია) გარდაქმნების ჯგუფი ბრტყელი მინკოვსკის სივრცის-დროის მაქსიმალური სიმეტრიაა.

გ) *ლორენცის და პუანკარეს ჯგუფების ალგებრა.*

ის რომ ლორენცის გარდაქმნები წარმოადგენენ მინკოვსკის სივრცე-დროის იზომეტრიის ჯგუფს ნიშნავს განმარტებისამებრ რომ

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} \eta_{\mu\rho} \Lambda^{\rho}_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma}$$

ან მატრიცული სახით (8)

$$\Lambda^{T} \eta \Lambda = \eta \quad .$$

ადვილად დასანახია რომ ეს ტოლობები სრულებით ექვივალენტურია მოთხოვნისა რომ ლორენც-გარდაქმნებისას ვექტორის კვადრატი $x_\mu^2 = x_\mu x^\mu$ იყოს ინვარიანტული.

თუ განვიხილავთ ახლა ინფინიტიზემალურ ლორენც-გარდაქმნებს მატრიცული სახით (4×4 მატრიცები მოქმედებენ 4-კოორდინატის სვეტზე x^μ)

$$\Lambda(\omega) = I + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \qquad (8')$$

სადაც $\omega^{\alpha\beta}$ გარდაქმნების პარამეტრებია ექვივალენტური ადრე შემოყვანილი ბუსტებისა და ბრუნვების კუთხეებისა

$$\omega^{\alpha\beta} = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03} \;\; ; \;\; \theta_{12},\, \theta_{13}, \theta_{23})$$

ხოლო $M_{\alpha\beta}$ კი ამ გარდაქმნების მატრიცული გენერატორები, რომლებიც მიიღება სასრული ლორენც-გარდაქმნებიდან (6-7) როგორც უსასრულოდ მცირე გარდაქმნების ოპერატორები

$$M_{\alpha\beta} = \frac{d}{d\omega^{\alpha\beta}} \Lambda(\alpha\beta,\, \omega^{\alpha\beta})\Big|_{\omega^{\alpha\beta}=0} \quad . \qquad (8'')$$

(ინდექსები $\alpha\beta$ ნომრავენ შესაბამის გენერატორებს). რადგან ეს გარდაქმნები მოიცავენ 6 ტიპის ოპერაციას (3 ბუსტი პლიუს 3 ბრუნვა) გასაგებია რომ გენერატორების $M_{\alpha\beta}$ და მათთან დაკავშირებული პარამეტრების $\omega^{\alpha\beta}$ რაოდენობაც უნდა იყოს 6. ჩვენ შეგვიძლია ორივე ეს სიდიდე გავნმარტოდ როგორც ლორენც-ჯგუფის ანტისიმეტრიული ტენზორი, რომელსაც მართლაც გააჩნია ზუსტად 6 დამოუკიდებელი კომპონენტი

$$M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha} \quad , \qquad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \qquad .$$

ამას გარდა ადვილად დავწრმუნდებით, რომ გამომდინარე ლორენც-გარდაქმნების იზომეტრიის ხასიათიდან ($\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$) ყველა ეს ექვსი გენერატორი თავისთავად ანტისიმეტრიულია, ანუ

$$(M_{\alpha\beta})^T = -M_{\alpha\beta} \quad .$$

და ბოლო და უმნიშვნელოვანესი - *გენერატორები* $M_{\alpha\beta}$ *ქმნიან ჩაკეტილ ლორენცის ჯგუფის ალგებრას* (იხ. ამოცანა 1)

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = \eta_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} + \eta_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma} - \eta_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta} \qquad (9)$$

თუ ახლა ლორენცის გარდაქმნებს დაუმატებთ 4-ტრანსლაციებსაც მაშინ, როგორც ავღნიშნეთ, გვექნება 10 პარამეტრიანი პუანკარეს ჯგუფი. ლორენც-გარდაქმნების (8') ანალოგიურად ინფინიტიზემალური ტრანსლიაციების მატრიცული სახისათვის ვღებულობთ

$$T(a) = I + a^{\mu} P_{\mu} \qquad (10)$$

სადაც P_{μ} ტრანსლიაციის 4 გენერატორს წარმოადგენს, ხოლო a^{μ} შესაბამისი პარამეტრებია. P_{μ} -გენერატორების ზუსტი სახის დადგენა შეიძლება თუ ვიცით სასრული ტრანსლაციის გარდაქმნები. ადვილად შესამოწმებელია რომ შემდეგი ტიპის 5×5 მატრიცა $T(a)$ როცა მოქმედებს 5-კოორდინატის სვეტზე (ბოლო კოორდინატას "1" ამ სვეტში ფიზიკური აზრი არა აქვს) ზუსტად იძლევა 4-კოორდინატის ტრანსლიაციას

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a^0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a^1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + a^0 \\ x^1 + a^1 \\ x^2 + a^2 \\ x^3 + a^3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

აქედან, ანალოგიურად (8'')-სა, მივიღებთ რომ ტრანსლიაციის გენერატორები წარმოჩნდებიან სასრული ტრანსლაციებისგან (11) როგორც უსასრულოდ მცირე ტრანსლიაციების ოპერატორები

$$P_\mu = \frac{d}{da^\mu} T(\mu,\ a^\mu)\Big|_{a^\mu=0} \tag{10'}$$

(ინდექსი μ ნომრავს შესაბამის გენერატორებს). შეიძლება შემოწმდეს რომ *ლორენცის და ტრანსლიაციების გენერატორები ერთად ქმნიან ჩაკეტილ პუანკარეს ალგებრას*, რომელშიც გარდა კომუტატორებისა (9) კიდევ კომუტატორების ორი ჯგუფია –

$$[M_{\alpha\beta}, P_\gamma] = \eta_{\beta\gamma} P_\alpha - \eta_{\alpha\gamma} P_\beta \qquad , \qquad [P_\alpha, P_\beta] = 0 \quad . \tag{12}$$

(**იხ**. ამოცანა 2). პირველ გამოსა**ხ**ულებაში კომუტაციის ჩასატარებლად 4×4 მატრიცები $M_{\alpha\beta}$ უნდა შეივსოს 5×5-დე ნულოვანი სტრიქონის და სვეტის შემოყვანით.

2. მინიმალური ქმედების პრინციპი მინკოვსკის სივრცე-დროში.

ა) *დინამიური ცვლადები მინკოვსკის სივრცე-დროში .*

გამომდინარე მინიმალური ქმედების პრინციპის უნივერსალურობიდან ჩვენ მივიღებთ რომ გალილეოს დრო-სივრციდან მინკოვსკის დრო-სივრცეზე გადასვლისას ის კვლავ ძალაში რჩება. დავადგინოთ უპირველეს ყოვლისა პრინციპულად რა სახე უნდა ჰქონდეს ლაგრანიანს ამ შემთხვევაში გარდა იმისა რომ ზოგადად ის უნდა იყოს ლორენც-ინვარიანტული სიდიდე. ბუნებრივია, რომ ლაგრანჟიანი - ისევე როგორც ადრე გალილეოს სივრცეში - დამოკიდებულია ძირითად დინამიურ ცვლადებზე, ანუ სისტემის კოორდინატებზე, მათ დროის წარმოებულებზე და თვით დროზე. მაგრამ მინკოვსკის სივრცე-დროში (სადაც აღარ ხდება დროისა და სივრცის განცალკევება) ერთი პრინციპული თავისებურებაა – ჩვეულებრივი (ანუ ლაბორატორული) დრო t ახლა 4-კოორდინატის x_μ ერთერთი კომპონენტია და ამიტომ ლაგრანჟიანი გამოყოფილად მასზე დამოკიდებული ვერ იქნება, რადგან ეს დაარღვევდა მის ლორენც-ინვარიანტობას. ამავე მიზეზით დაუშვებელია ლაგრანჟიანში კოორდინატების წარმოებულების შემოყვანაც ლაბორატორული დროის მიმართ. ლაპარაკი შეიძლება იყოს მხოლოდ საკუთარ დროზე τ რომელიც თავისთავად ლორენც-ინვარიანტულია სიდიდეა (იხ. (3,4)) და კოორდინატების ამ დროის მიმართ წარმოებულებზე, ანუ ‘‘საკუთარ’’ 4-სიჩქარეებზე $\dot{x}_\mu$. ამრიგად, რელატივისტური ლაგრანჟიანი 4-კოორდინატების, საკუთარი სიჩქარეებისა და საკუთარი დროის ფუნქცია უნდა იყოს და შესაბამის ქმედებას უნდა ჰქონდეს სახე

$$L(x_\mu, \dot{x}_\mu, \tau) \quad \Rightarrow \qquad S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x_\mu, \dot{x}_\mu, \tau) d\tau \tag{13}$$

თუ საკუთარი დროის $\tau = \tau_1$ და $\tau = \tau_2$ მომენტებში სისტემა უკავია განსაზღვრული მდებარეობები, რომლებიც ხასიათდება 4-კოორდინატთა ორი კრებულით $x_\mu^{(1)}$ და $x_\mu^{(2)}$. აქედან ქმედების ვარიაციის შედეგად (იხ. თავი I, ფორმულები (3,4)) ვღებულობთ მოძრაობის განტოლებებს

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}\right) = 0 \qquad (\mu = 0,1,2,3) \tag{14}$$

რომლებიც ზოგადად იგივე სახისა არიან როგორც მოძრაობის განტოლებები არარელატივისტურ დინამიკაში. დამატებითი შეზღუდვები ჩნდება მაშინ, როცა ლაგრანჟიანში ცხადათ ვითხოვთ სიმეტრიებს, რომელსაც ფლობს მინკოვსკის სივრცე-დრო.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია რომ ლორენც-ინვარიანტობის გამო სივრცული და დროის კოორდინატები აღარ არიან დამოუკიდებელი ცვლადები, რადგან ყოველი 4-კოორდინატის კვადრატის x_μ^2 მნიშვნელობა სივრცე-დროის ჰიპერბოლოიდის $x_\mu^2 = c^2\tau^2$ ზედაპირზე მდებარე ერთერთ წერტილს შეესაბამება, როგორც ეს ცხადათ ჩანს ინვარიანტული ინტერვალის გამოსახულებიდან (2, 2'). მეორეს მხრივ, როგორც ვხედავთ, ეს მნიშვნელობა, განსაზღვრას საკუთარი დროის შესაბამის მნიშვნელობასაც. ამრიგად, თუ ჩვენ შევყავს ეს ლორენც-შეზღუდვები უშუალოდ ლაგრანჟიანში მაშინ ის პრაქტიკულად შეიძლება მხოლოდ საკუთარი დროის τ ფუნქცია იყოს, ან საერთოდაც იყოს კონსტანტა (თუ ამ დროის მიმართ ერთგვაროვნება მოითხოვება). ამის შედეგად ჩვენ გვიწევს მერე ამ კონსტანტურ ლაგრანჟიანიდან არაინვარიანტულ ‘‘ლაბორატორულ’’ ლაგრანჟიანზე გადასვლა რომ მისი საშუალებით მაინც მოხერხდეს მექანიკური სისტემის ანალიზი (იხ. ქვემოთ, (ბ)).

მეორე მიდგომაში შეზღუდული ლორენც-კონფიგუარციები 4-კოორდინატისთვის ($x_\mu^2 = c^2\tau^2$) ან/და საკუთარი 4-სიჩქარისთვის ($\dot{x}_\mu^2 = c^2$) განიხილება მხოლოდ როგორც გარე დინამიური ბმები მექანიკური სისტემის ცვლადებისათვის. ამრიგად ლაგრანჟიანის ცხადი ვარირება ხდება შესაძლებელი, რის შედეგად ყველა შესაძლო *რელატივისტურად შეზღუდულ* ტრაექტორიებს შორის ჩვენი სისტემა ირჩევს ერთადერთ ფიზიკურ ტრაექტორიას. ეს მიდგომა გვაძლევს საშუალებას შევინარჩუნოთ ყველა ეტაპზე 4-განზომილებიანი კოვარიანტული ფორმულირება (იხ. ქვემოთ, (გ)). ამასთან როგორც ვნახავთ, ორივე მიდგომაში მოძრაობის განტოლებები თავისუფალი ნაწილაკისთვის ფიზიკურად ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

ბ) *ეფო-ს ლაგრანჟიანი – არაკოვარიანტული ფორმულირება.*

(i) ლაგრანჟიანი. განვიხილოთ ახლა თავისუფლად მოძრავი *ეფო* (ელემენტარული ფიზიკური ობიექტი) ათვლის ინერციულ სისტემაში, რომელშიც სივრცე-დრო, როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, ინვარიანტულია პუანკარეს ჯგუფის (5') მიმართ. ეს სიმეტრიის ჯგუფი გამოხატავს დროს-სივრცის 4-იზოტროპია (ბრუნვები და ბუსტები) და ამავდროულად მის ერთგვაროვნებასაც (4-ტრანსლაციები). ამ პირობებში *ეფო*-ს ლაგრანჟიანი არ შეიძლება იყოს სხვა რამეზე დამოკიდებული გარდა საკუთარი 4-სიჩქარის კვადრატისა

$$L = L(\dot{x}^2) \qquad (\dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\ , \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}\ ) \tag{15}$$

მაგრამ თუ გამოვიყენებთ ახლა ბუნებრივ ლორენც-კონფიგურაციას საკუთარი 4-სიჩქარისათვის, რომლის თანახმად ამ სიჩქარის კვადრატი უბრალოდ სინათლის სიჩქარის კვადრატია (იხ. (2,3)) მივდივართ ზოგად დასკვნამდე, რომ ეფო-ს ლაგრანჟიანი უნდა უბრალოდ იყოს კონსტანტა. ესე იგი ქმედებისათვის (13) მაშინ გვაქვს

$$S = \beta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \tag{16}$$

სადაც β კონსტანტაა, რომლის მნიშვნელობას მოგვიანებით დავადგენთ. გასაგებია რომ ყველა შემთხვევაში ეს კონსტანტა უნდა იყოს უარყოფითი რომ გვქონდეს ქმედების მინიმალური (და არა მაქსიმალური) მნიშვნელობა. მართლაც, როგორც ავღნიშნეთ (იხ. 1-ბ), საკუთარი დროის ინტეგრალი (16) მაქსიმალურია როცა საათი ამ შუალედში უძრავია და მისი მსოფლიო წირი წარმოადგენს დროის ღერძის მონაკვეთს. მაშინ გასაგებია რომ $\beta<0$ უზრუნველყოფს ქმედების მინიმალურობას.

თუ გადავალთ ახლა ლაბორატორულ სისტემაში მაშინ თანახმად ზემოთ მოყვანილი განტოლებისა (3)

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ქმედება (16) გადაიწერება როგორც

$$S = \beta \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{17}$$

რადგან ლაბორატორულ სისტემაში არარელატივისტურ ზღვარზე გადასვლისას უნდა მივიღოთ ეფო-ს კლასიკური ლაგრანჟიანი

$$L_{cl} = \frac{mv^2}{2}$$

ვითხოვთ თანაფარდობას

$$\frac{v}{c} << 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1-\frac{v^2}{2c^2}$$

და შედეგად გვაქვს

$$L = \beta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong \beta - \frac{\beta v^2}{2c^2}$$

პირველი წევრი ამ გამოსახულებაში უმნიშვნელო კონსტანტაა, ხოლო მეორედან ვღებულობთ

$$-\frac{\beta v^2}{2c^2} = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = -mc^2$$

და ამიტომ საბოლოოდ ლაგრანჟიანი ლაბორატორულ ათვლის სისტემაში არის

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{18}$$

ბუნებრივია, ეს ლაგრანჟიანი არაინვარიანტულია, რადგან როგორც დავრწმუნდით მინკოვსკის სივრცეში ინვარიანტული ლაგრანჟიანი მხოლოდ კონსტანტა შეიძლება იყოს, $\beta = -mc^2$. მაგრამ ქმედება ყოველთვის ინვარიანტულია.

(ii) მოძრაობის განტოლებები. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს თავისუფალი ნაწილაკისათვის ექნება სახე:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = 0 \quad . \tag{19}$$

აქედან ლაგრანჟიანის (14) პირდაპირი ჩასმით ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\left(-mc^2\frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m\dot{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=0$$

ანუ

$$\dot{v}=0 \qquad \rightarrow \qquad v=const \tag{20}$$

და ამრიგად მივიღეთ *ნიუტონის პირველი კანონი.*

(iii) იმპულსი და ენერგია. განვმარტოთ 3-განზომილებიანი იმპულსი p_i ისე როგორც ის განმარტებულია არარელატივისტურ მექანიკაში (თავი I, ფორმულა (5))

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{21}$$

(აქ კოორდინატის წარმოებული t-დროით იგულისხმება, $\dot{x}_i=v_i$), **ხ**ოლო ენერგიისათვის (თავი I, ფორმულა (16)) გვაქვს

$$E=p_iv_i-L=\frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{22}$$

არარელატივისტურ ზღვარზე ვღებულობთ

$$E\left(\frac{v^2}{c^2}<<1\right)\cong mc^2+\frac{mv^2}{2}$$

აქ mc^2 უძრაობის ენერგიაა, **ხ**ოლო $mv^2/2$ არარელატივისტური კინეტიკური ენერგია.

მივიღოთ ა**ხ**ლა ცნობილი თანაფარდობა ენერგიასა და იმპულს შორის. მართლაც პირდაპირი ჩასმით ვრწმუნდებით რომ

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2c^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^4$$

ანუ

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \qquad (23)$$

თუ განვი**ხ**ილავთ $c=1$, მაშინ $E^2 = p^2 + m^2$, **ხ**ოლო თუ ენერგიას 4-იმპულსის მეოთ**ხ**ე კომპონენტად გამოვაც**ხ**ადებთ, მაშინ $p_\mu^2 = m^2$. ეს რელატივისტური მექანიკის ძირითადი განტოლებაა. ამ განტოლებიდან ჩანს რომ ნაწილაკი იმყოფება რელატივისტური ჰიპერბოლოიდის ზედაპირზე იმპულსურ სივრცეში.

იმპულსისა და ენერგიის თანაფარდობებიდან (21, 22) ავტომატურად გამომდინარეობს, რომ

$$p_i = \frac{Ev_i}{c^2} \quad . \qquad (23')$$

თუ $v=c$ მაშინ *ეფო* აუცილებლად უმასო უნდა იყოს – რომ არ ჰქონდეს უსასრულო ენერგია და იმპულსი – და მაშინ

$$p = \frac{E}{c} \quad . \qquad (23'')$$

(**iv**) **ჰამილტონიანი.** ენერგია გამოსა**ხ**ული იმპულსის საშუალებით ეს, როგორც ვიცით, უკვე ჰამილტონიანია და განტოლება (23) გვაძლევს მისთვის

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \qquad (24)$$

რაც არარელატივისტურ ზღვარზე უძრაობის ენერგიის mc^2 გამოკლების შემდეგ ცნობილი კლასიკური შედეგის $p^2/2m$ ექვივალენტურია.

გ) *4-განზომილებიანი კოვარიანტული ფორმულირება.*

(i) ლაგრანჟიანი და მოძრაობის განტოლებები. ზოგადად, როგორც დავადგინეთ ძემოთ, *ეფო*-ს ლაგრანჟიანს უნდა ჰქონდეს სახე $L = L(\dot{x}^2)$ (იხ. (15)). ამ ლაგრანჟიანის უფრო ზუსტი სახის გამოყვანა ვერ ხერხდება. მართლაც, განსხვავებით არა-რელატივისტური თეორიისა, სადაც ინვარიანტობა გალილეოს გარდაქმნების მიმართ ითხოვს რომ ის იყოს $\dot{x}^2$-is წრფივი ფუნქცია (იხ. I-ბ), რელატივისტურ თეორიაში ლაგრანჟის ლორენც-ინვარიანტობა ვერ აფიქსირებს მის კონკრეტულ სახეს. ამიტომ მზგავსათ კლასიკური თეორიისა (და სიმარტივისათვის) ჩვენ უბრალოდ მივიღებთ რომ რელატივისტური თავისუფალი ეფო-ს ლაგრანჟიანიც $\dot{x}^2$-ის წრფივი ფუნქციაა

$$L = \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad . \tag{25}$$

მასის m ამ სახით შემოყვანა ლაგრანჟიანში (25) განპირობებულია, როგორც მალე დავწრმუნდებით (იხ. ქვემოთ განტოლება (26)), თავისუფალი *ეფო*-ს 4-იმპულსის სწორი განსაზღვრით.

ამასთან ერთად, ჩვენ უნდა უზრუნველვყოთ შეზღუდული ლორენც-კონფიგურაციები საკუთარი 4-სიჩქარისთვის ($\dot{x}_\mu^2 = c^2$) მინკოვსკის სივრცე-დროში. ამ საკითხის მათემატიკურად კორექტული განხილვა გულისხმობს ქმედებისათვის (13) ე.წ. პირობითი ექსტრემუმის პოვნას, ანუ ექსტრემუმისა, რომელიც იმავდროულად აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ შეზღუდვას (ბმას). თავისუფალი ნაწილაკის შემთხვევაში ეს შეიძლება განხორციელებულ იქნას *ეფო*-ს ლაგრანჟიანში დამატებითი წევრის შემოყვანით,

$$L = \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{4} \lambda (\dot{x}_\mu^2 - c^2)^2 \tag{25'}$$

სადაც ფუნქციას $\lambda(\tau)$ *ლაგრანჟიანის მამრავლს* უწოდებენ. ადვილად დასანახია რომ ლაგრანჟის ვარიაცია ამ მამრავლის მიმართ წარმოშობს ახალ განტოლებას დამატებით იმ მოძრაობის განტოლებებთან, რომელიც გამომდინარეობენ ჩვეულებრივი ვარიაციიდან 4-კოორდინატის მიმართ. ანუ ჯამში ჩვენ გვაქვს

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\left(m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} + \lambda\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}(\dot{x}_{\mu}^{2} - c^{2})\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad (\dot{x}_{\mu}^{2} - c^{2})^{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_{\mu}^{2} = c^{2} \quad . \tag{25''}$$

აქედან მეორე განტოლების გამოყენებით პირველში ვღებულობთ საბოლოოდ თავისუფლად მოძრავი *ეფო*-ს განტოლებებს

$$\eta_{\mu\nu}\ddot{x}^{\nu} = 0 \quad , \quad \eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = c^{2} \tag{25'''}$$

სადაც მეორე განტოლება წარმოადგენს, როგორც ვიცით, ბმის პირობას საკუთარი სიჩქარისთვის მინკოვსკის სივრცე-დროში. ჩვენ ის აქ მივიღეთ როგორც *ეფო*-ს მოძრაობის ერთერთი განტოლება.

(ii) **4-იმპულსი და 4-ძალა**. 4-განზომილებიანი იმპულსი წარმოადგენს არა-რელატივისტური თეორიაში განსაზღვრული 3-განზომილებიანი იმპულსის (**იხ**. **I**-(6''')) ბუნებრივ განზოგადებას

$$p^{\mu} = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\nu}} = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left(p^{0}, \vec{p}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\right) \qquad \left(p^{\mu}\right)^{2} = \frac{E^{2}}{c^{2}} - p^{2} = m^{2}c^{2}$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ კავშირი საკუთარ და ლაბორატორულ დროებს შორის (**იხ**. (3)).

მზგავსად 3-განზომილებიანი ძალისა (**იხ**. **I**-(7)) შემავიყვანოთ 4-განზომილებიანი ძალა

$$F^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = m\frac{d^{2}x^{\mu}}{d\tau^{2}} \qquad . \tag{26}$$

თუ ისევ გამოვიყენებთ კავშირს საკუთარ τ და ლაბორატორულ t დროს შორის (იხ. (3)) მივიღებთ ამ ძალის კომპონენტებისათვის

$$F^{\mu} = \left(F^{0}, \vec{F}\right) = \left(\frac{(\vec{f}\cdot\vec{v}/c)}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}, \frac{\vec{f}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}\right) \qquad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{26'}$$

სადაც $\vec{f}$ ჩვეულებრივი 3-კომპონენტიანი ძალაა. საინტერესოა, რომ 4-ძალის დროის კომპონენტს F^{0} ამ 3-კომპონენტიანი ძალის $\vec{f}$ მიერ შესრულებული მუშაობის ფიზიკური აზრი აქვს. ეს, როგორც ვხედავთ, წმინდა რელატივისტური ეფექტია რომელიც ქრება კლასიკური მექანიკის ზღვარზე

$(c \to \infty)$.

ავღნიშნოთ, რომ თუ ეფო-ს ლაგრანჟიანში (25) შედის პოტენციური ენერგიის წევრიც $U(x)$ - რაიმე 4-კოორდინატზე დამოკიდებული ფუნქცია – მაშინ მზგავსად არა-რელატივისტური თეორიისა (იხ. I-(7')) ჩვენ გვაქვს შესაბამისი 4-ძალის განმარტებაც

$$F^{\mu} = \frac{\partial L}{\partial x_{\mu}} = -\frac{\partial U}{\partial x_{\mu}} \qquad . \tag{26''}$$

რომელშიც კომპონენტები უშუალოდ დაკავშირებულია შესაბამის კომპონენტებთან წინა განტოლებაში (26'). შესაბამისადაც იცვლება *ეფო*-ს მოძრაობის განტოლება (25''')

$$m\eta_{\mu\nu}\ddot{x}^{\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}U \tag{26'''}$$

რაც, როგორც მიხვდით, წარმოადგენს *ნიუტონის მეორე კანონის რელატივისტურ ანალოგს.*

(iii) ჰამილტონ-იაკობის რელატივისტური განტოლება. ასევე ანალოგიურად არა-რელატივისტური თეორიისა (იხ. I-(6)) ჩვენ შეგვიძლია 4-იმპულსი უშუალოდ დავაკავშიროდ ქმედებასთან (13)

$$p^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^{\nu}} \tag{27}$$

თუ მას განვიხილავთ როგორც 4-კოორდინატის ფუნქციას. ანუ მის ვარიაციის დროს

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \delta x^{\mu} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) \delta x^{\mu} d\tau = 0$$

4-კოორდინატის ვარიაციას საწყის τ_1 მომენტში ავიღებთ ნულის ტოლად $\delta x^{\mu}(\tau_1) = 0$, ხოლო τ_2 მომენტში მივცემთ ზოგად არანულოვან მნიშვნელობას $\delta x^{\mu}(\tau_2) = \delta x^{\mu}$. რადგან რეალური მოძრაობის ტრაექტიერია უნდა აკმაყოფილებდეს ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას ინტეგრალი ქმედების ვარიაციაში შეიძლება ავიღოთ ნულის ტოლად და მაშინ ამ გამოსახულების პირველი წევრიდან ვღებულობთ

$$\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}$$

საიდანაც პირდაპირ გამომდინარეობს 4-იმპულსისა და ქმედების კავშირი (27).

თუ ახლა გამოვიყენებთ ამ კავშირს 4-იმპულსის კვადრატის გამოსახულებაში (იხ. (ii)) მივიღებთ *ჰამილტონ-იაკობის რელატივისტური განტოლებას*

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = m^2 c^2 \tag{27'}$$

რომელსაც ჩვენ არაერთხელ მოვიხმობთ შემდგომ სხვადასხვა კონტექსტში.

(iv) ლაგრანჟიანის სიმკვრივე. ამ კოვარიანტულ მიდგომაში შეიძლება აგრეთვე ლაგრანჟიანის მაგივრად მისი სიმკვრივის შემოყვანა თეორიაში, რაც გარკვეულ

წილად აახლოვებს ნაწილაკების განხილვას მინკოვსკის სივრცე-დროში ველების განხილვასთან (იხ. III). მართლაც, გარდა საკუთარი დროის დიფერენციალისა $d\tau$ ჩვენ განკარგულებაშია კიდევ ორი ლორენც-ინვარიანტული სიდიდე – 4-განზომილებიანი მოცულობის დიფერენციალი d^4x (იხ. ამოცანა 9) და 4-განზომილებიანი დელტა-ფუნქცია $\delta^4(x)$ (იხ. ამოცანა 10). ამიტომ ნაწილაკთან დაკავშირებული ქმედება (13) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$S = \int d^4x \left\{ \int d\tau \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - x(\tau)) \right\} \tag{13'}$$

სადაც გამოსახულება ფიგურულ ფრჩხილებში წარმოადგენს თავისუფალი ნაწილაკის ლორენც-ინვარიანტულ ლაგრანჟის ფუნქციის სიმკვრივეს

$$\zeta_0(x) = \int d\tau \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - x(\tau)) \quad . \tag{13''}$$

ჩვენ ხშირად მომავალში, თუ ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, ლაგრანჟიანის სიმკვრივისაც უწოდებთ ლაგრანჟიანს, ჩვეულებრივ ლაგრანჟიანს კი – ‘‘ინტეგრირებულ’’ ლაგრანჟიანს.

3. შენახვის კანონები.

ა) *4-იმპულსი.*

ნიოტერის თეორემის თანახმად ტრანსლაციური ინვარიანტობიდან ანალოგიურად არა-რელატივისტური თეორიისა (იხ. I-4) გამომდინარეობს იმპულსის შენახვის კანონი:

$$X^{\mu} \to X^{\mu} + \varepsilon f^{\mu} \qquad \frac{d}{d\tau}\left(f^{\mu} p^{\mu}\right) = 0 \qquad f^{\mu} = a^{\mu} \qquad \Rightarrow \qquad p^{\mu} = const \tag{28}$$

ბ) *კუთხური 4-მომენტი.*

ახლა, ვთქვათ, $f^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} x_{\nu} a_{\sigma\rho}$, სადაც $a_{\sigma\rho}$- პარამეტრებია. მაშინ, როგორც მოსალოდნელია (იხ. I-4), შენახვადი სიდიდე იქნება 6-კომპონენტიანი ტენზორი

$$M^{\sigma\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} p_{\mu} x_{\nu} \tag{29}$$

აქედან, სამი კომპონენტი (i,j,k ნომრავენ სივრცულ კომპონენტებს)

$$M^{0i} = \varepsilon^{0ijk} p_j x_k \tag{29'}$$

ცნობილი ბრუნვითი მომენტის კომპონენტებია (I-4-21), ხოლო დანარჩენი სამი

$$M^{ij} = \varepsilon^{ij\sigma\rho} p_{\sigma} x_{\rho} = \varepsilon^{ijk0} (p_k x_0 - p_0 x_k) \tag{29''}$$

მოძრაობის ახალი ინტეგრალებია.

გ) *ნაწილაკთა 4-განზომილებიანი დენი.*

შემოვიყვანოთ ნაწილაკთა ($i = 1, 2, \ldots$) რიცხვის სიმკვრივე $n(x,t)$ სივრცის ერთეულოვან მოცულობაში და ამ ნაწილაკთა დენის სიმკვრივე $\boldsymbol{j}(x,t)$ როგორც

ნაწილაკთა რაოდენობა, რომელიც კვეთს ამ მოცულობის გარემომცველ ერთეულოვან ზედაპირს დროის ერთეულში:

$$n(\vec{x},t)=\sum_i \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i(t)) \quad , \qquad \vec{j}(\vec{x},t)=\sum_i \frac{d\vec{x}_i}{dt}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i(t)) \tag{30}$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ, რომ რიცხვის და დენის სიმკვრივე უდრიან ნულს თუ სივრცული კოორდინატი $\vec{x}$ არ იმყოფება ზუსტად შესაბამისი ნაწილაკის ტრაექტორიაზე $\vec{x}_i(t)$. ჩვენ შეგვიძლია გავაერთიანოდ ეს ორი სიმკვრივე ერთ 4-განზომილებიან დენის სიმკვრივეში თუ გადავალთ საერთო ლაბორატორიულ დროდან t საკუთარ დროზე τ_i ყოველი ნაწილაკისთვის და გამოვიყენებთ ამ დროების მიმართ ინტეგრალურ ფორმას

$$j^\mu(x)=\sum_i \int d\tau_i \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i}\delta^4(x-x_i(\tau_i)) \tag{31}$$

(სადაც x უკვე აღნიშნავს 4კოორდინატას, სინათლის სიჩქარე $c=1$ აქ და ქვემოთ). ადვილად დასანახია რომ ასე განმარტებული დენის სიმკვრივე (შემდგომ – დენი) ჭეშმარიტი 4-ვექტორია და მისი 4-დივერგენცია უდრის ნულს

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ . \tag{32}$$

მისი შენახვა დაკავშირებულია იმასთან რომ ჩვენ გვაქს ნაწილაკების უწყვეტი ნაკადი: ნაწილაკები არ ჩნდება და არ ქრება - მათი რაოდენობა ინახება. მართლაც, თუ ნაწილაკთა რიცხვის სიმკვრივე $n(x,t)$ იცვლება დროში რაღაცა მოცულობის შიგნით მაშინ ამ ცვლილებით გამოწვეული ნაწილაკების ნაკადი კვეთს ამ მოცულობის გარემომცველ ზედაპირს – ზუსტად იმდენივე ნაწილაკი დროის ერთეულში გამოდის გარეთ ან შედის შიგნით (დამოკიდებული იმაზე მცირდება თუ იზრდება $n(x,t)$).

ასეთი დენის ცნობილ მაგალითს წარმოადგენს *ნაწილაკთა ელექტრომაგნიტური დენი,* რომელიც მიიღება გამოსახულებიდან (31) თუ მასში ჩავრთავთ შესაბამისი ნაწილაკების მუხტებს e_i -

$$j^\mu_{em}(x)=\sum_i \int d\tau_i e_i \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i}\delta^4(x-x_i(\tau_i)) \tag{33}$$

სწორედ ეს დენი განსაზღვრავს დამუხტული ნაწილაკების *ურთიერთქმედებას ელექტრომაგნიტურ ველთან* (იხ. 4).

დ) *ნაწილაკთა ენერგია-იმპულსი*

ანალოგიურად შეიძლება შემოყვანილ იქნას ნაწილაკთა *ენერგია-იმპულსის სიმკვრივის ტენზორი* (შემდგომ - ენერგია-იმპულსის ტენზორი)

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_i \int d\tau_i m_i \frac{dx_i^{\mu}}{d\tau_i}\frac{dx_i^{\nu}}{d\tau_i}\delta^4(x - x_i(\tau_i)) \tag{34}$$

რომელიც ასევე ინახება

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{35}$$

ამ ტენზორის არსებობა განპირობებულია თავისუფალი ლაგრანჟიანის (25) ინვარიანტობით 4-ტრანსლიაციების მიმართ – იმ შემთხვევაში თუ პოტენციალი U მასში აღებულია ნულის ტოლად. ამის შედეგად 4-კოორდინატი x^{μ} ხდება ციკლიურ ცვლადად და მის მიმართ ლაგრანჟიანის გაწარმოებას (ანალოგიურად არა-რელატივისტური თეორიისა (იხ. I-4)) პირადპირ მივყევართ - ყველა ნაწილაკების წვლილების აჯამვით და მათი მსოფლიო წირების $x^{\mu} = x^{\mu}{}_i(\tau)$ გათვალისწინებით - ტენზორის გამოსახულებასთან (25).

მეორე და უფრო ელეგანტური გზა ამ ტენზორის მიღებისა იქნებოდა თუ ჩვენ წარმოვიდგენდით, რომ ნაწილაკთა დენს (31) გადაქვს 4-იმპულსების ნაკადი

$$p_i^{\nu} = m_i \frac{dx_i^{\nu}}{d\tau_i} \tag{36}$$

ისე როგორც მას გადააქვს მუხტები e_i ელექტრომაგნტური დენის შემთხვევაში - ანუ მოვახდენდით შეცვლას $e_i \to p_i^{\nu}$ ამ დენის გამოსახულებაში (33). მაშინ რადგან 4-იმპულსი (36) თვითონ სტრუქტურულად ამ დენის მაგვარია ჩვენ ვღებულობთ ორ ინდექსიან სიმეტრიულ ტენზორს (34) ნაწილაკების ენერგია-იმპულისთვის. ეს სწორედ ის სიდიდეა, რომელიც განაპირობებს *ელემენტარული ფიზიკური ობიექტების (ნაწილაკების) ურთიერთქმედებას გრავიტაციულ ველთან* (იხ. 4).

4. ნაწილაკები ელექტრომაგნიტურ ველში.

ელექტრომაგნიტური ველისა და მისი ძირიდათი თვისებების განხილვა მოხდება მოგვიანებით (იხ. III). ჩვენ აქ განვიხილავთ მას მხოლოდ როგორც გარე ველს, ანუ როგორც ბუნებრივ გარემოს, რომელშიც შეიძლება აღმოჩნდეს ნაწილაკი. მაშინ თუ ნაწილაკი ელექტრულად დამუხტულია ეს გარემო - ელექტრომაგნიტური ველის სახით - მოახდენს ამ ნაწილაკის მოძრაობაზე სპეციფიურ გავლენას. ელექტრულად ნეიტრალური ნაწილაკი კი არ იგრძნობს ამ ველს და მისთვის არაფერი არ შეიცვლება.

ქვემოთ ყველგან, სადაც ამას არა აქვს პრინციპული მნიშვნელობა, სინათლის სიჩქარისათვის მივიღებთ $c=1$.

ა) *ქმედება და მოძრაობის განტოლებები.*

ადვილად მისაგნებია რომ უმარტივეს ლორენც-ინვარიანტულ ლაგრანჟიანს, რომელიც აღწერს თვით ნაწილაკს და იმავდროულად მის ურთიერთქმედებას გარე ელექტრმაგნიტურ ველთან - წარმოდგენილს ვექტორ-პოტენციალით $A_\mu(x)$ - უნდა ჰქონდეს სახე

$$\zeta_{em}(x) = \zeta_0(x) - j^\mu_{em}(x) A_\mu(x) \tag{37}$$

(ნიშანი ‘‘–’’ ურთიერთქმედბეის წევრთან პირობითია, ზოგადად აქ შეიძლება იდგეს ნებისმიერი კონსტანტა – მაშინ ჩვენ მას ნაწილაკის ელექტრულ მუხტში ‘‘ჩავრთავთ’’). აქედან თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟიანის $\zeta_0(x)$ (13’’) და მისი ელექტრომაგნიტური დენის j^μ_{em} (33) სტრუქტურის გათვალისწინებით მივდივართ ქმედებამდე

$$S = \int d^4x\, \zeta_{em}(x) \quad \longrightarrow \quad S = \int d\tau\, L_{em}(\dot{x}^\mu, A_\mu) \tag{37’}$$

სადაც ‘‘ინტეგრირებული’’ ლაგრანჟიანი L_{em} არის

$$L_{em}(\dot{x}^{\mu}, A_{\mu}) = \frac{1}{2} m\eta_{\mu\nu} e \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau}\frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} - e\frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} A_{\mu}(x(\tau)) \quad . \qquad (37'')$$

A_{μ}-ველში მითითებული არგუმენტი $x(\tau)$ ნიშნავს რომ ველი მოქმედებს ზუსტად ნაწილაკის შესაძლო ტრაექტორიის გასწვრივ. ეს ავტომატურად გამოდის ლაგრანჟიანის x-ინტეგრირებით და შესაბამისი დელტა ფუნქციის მოხსნით.

საბოლოოდ, ქმედების (37’) ვარიაციის შედეგად ვღებულობთ ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას ელექტრომაგნიტურ ველში

$$\frac{\partial L_{em}}{\partial x^{\mu}(\tau)} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_{em}}{\partial \dot{x}^{\mu}(\tau)} = 0 \qquad \to \qquad m\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = e\eta_{\nu\sigma}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}F^{\sigma\mu} \qquad (38)$$

სადაც $F_{\sigma\mu} = \partial_{\sigma}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\sigma}$ ველის დაძაბულობის ცნობილი ტენზორია.

სპეციალურად აღსანიშნავია რომ ეს მოძრაობის განტოლება ავტომატურად ინვარიანტულია ე.წ. ყალიბური გარდაქმნების მიმართ (იხ. თავი III)

$$A_{\mu}\big(x(\tau)\big) \to A_{\mu}\big(x(\tau)\big) + \partial_{\mu}\alpha\big(x(\tau)\big) \qquad (39)$$

სადაც $\alpha(x)$ 4-კოორდინატის ნებისმიერი ფუნქციაა. მართლაც, გარდაქმნა (39) გვაძლევს დამატებით წევრს ქმედებაში (37)

$$-e\int d\tau \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau}\,\partial_{\mu}\alpha(x(\tau)) = -e\int d\tau \frac{d}{d\tau}\alpha(x(\tau)) = -e[\alpha(x(\tau_2)) - \alpha(x(\tau_1))] \qquad (40)$$

რომელიც უბრალოდ რიცხვია და ამიტომ არ ცვლის ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებებს ქმედების ვარიაციის დროს.

ბ) *ლორენცის ძალა.*

განტოლება (38) კომპონენტებში, თუ გადავალთ საკუთარი დროდან ლაბორატორულ დროზე, გვაძლევს ნაწილაკის ენერგიისა და 3-იმპულსის ცვლილებას ამ ნაწილაკზე მომქმედი ელექტრომაგნიტური ძალების შედეგად:

$$\frac{dp^0}{dt} = e\,(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{E}) \quad , \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}) \qquad (41)$$

სადაც 4-იმპულსის კომპონენტები მოცემულია ზემოთ (იხ. (**ii**)), ხოლო ელექტრული და მაგნიტური ველების ვექტორები არიან შესაბამისად

$$E^i = -F^{0i} \qquad B^i = -\varepsilon^{ijk}F_{jk}$$

ეს შეიძლება დავინახოთ უფრო მარტივად, თუ გავიხსენებთ 4-განზომილებიანი ძალის გამოსახულებას (26, 26’). მართლაც, განტოლება (38)-ის მარცხენა მხარე წარმოადგენს 4-ძალას, რომელიც მოქმედებს ელექტრომაგნიტურ ველში მყოფ ნაწილაკზე. ამ ძალის ლაბორატორული კომპონენტები სწორედ მოყვანილი ზემოთ გამოსახულებებია (იხ. (41)). 3-განზომილებიან ვექტორულ ძალას

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}) \qquad (42)$$

ლორენცის ძალა ეწოდება. 4-ძალის მეოთხე კომპონენტი კი, როგორც ადრე ავღნიშნეთ, ამ 3-განზომილებიანი ძალის მუშაობას შეესაბამება.

გ) *არა-რელატივისტური და სტატიკური ზღვარი.*

ვიპოვოთ ახლა ლორენცის ძალის მნიშვნელობა არა-რელატივისტურ ზღვარზე სტატიკურ (ესე იგი დროში მუდმივ) ელექტრომაგნიტურ ველში, ანუ მივიღოთ რომ

$$\left|\vec{v}\right| << c \quad , \quad E^i = -F^{0i} = -\partial_i \varphi \tag{43}$$

(სადაც φ ვექტორ-პოტენციალის A^μ დროის კომპონენტია $\varphi = A^0$, რომელსაც შემდგომ უწოდებთ პოტენციალს). მაშინ განტოლება (42) მიიღებს სახეს

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{\nabla}\varphi \quad . \tag{43'}$$

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ ამ სტატიკურ ელექტრულ ველს ქმნის რაღაცა უძრავი მასიური მუხტი Q ისე რომ ჩვენი ნაწილაკი მოძრაობს ამ მუხტის მოქმედების არეში. მაქსველის განტოლებას თანახმად ამ მუხტის სიმკვრივე ρ განსაზღვრავს ელექტრული ველის დივერეგენციას (იხ. III–(39))

$$div\vec{E} = \rho$$

რომელიც მოცემული სტატიკური ველის შემთხვევისათვის ღებულობს *პუასონის განტოლების* სახეს

$$\nabla^2 \phi \; = \; -\rho \qquad (\nabla^2 = \partial_i^2) \quad . \tag{44}$$

თუ ეს მუხტი წერტილოვანია და იმყოფება კოორდინატთა სათავეში მაშინ

$$\rho = Q\delta(\vec{r}) \tag{45}$$

სადაც $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$, Q კი ამ მუხტის მნიშვნელობაა. ამ პირობებში განტოლება (44) ადვილად იხსნება და გვაძლევს შემდეგი სახის ცენტრალურ-სიმეტრიულ პოტენციალს[1] φ და (შესაბამისად) ცენტრალურ-სიმეტრიულ ელექტრულ ველს $\vec{E}$

---

[1] მართლაც თუ $\varphi(r)$ მხოლოდ მანძილის ფუნქციაა მაშინ განტოლება (44-45)-ის ინტეგრირებით სფერულ კოორდინატებში - $\nabla^2\phi = (1/r^2)\mathrm{d}/\mathrm{d}r\left(r^2 \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r\right)$, $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\omega$ - ადვილად მივდივართ მოყვანილ პასუხამდე (46). იმის გამო,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi r} \quad , \quad \vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi r^3} \quad (r = |\vec{r}|) \tag{46}$$

(სადაც $\vec{r}(x,y,z)$ ჩვეულებრივი სივრცული 3-ვექტორია), რაც წარმოადგენს *კულონის ცნობილი კანონის გამოსახულებას.*

თუ ჩავსვავთ ახლა ამ გამოსახულებას განტოლებაში (43') და გავითვალისწინებთ ზემოთ ხსენებულ არა-რელატივისტურ ძღვარს იმპულსისთვისაც მივიღებთ ჩვენი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას Q მუხტის სტატიკურ კულონურ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = eQ\frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \tag{47}$$

რომლის ამოხსნა, როგორც ვიცით ცენტრალურ-სიმეტრიული პოტენციალის განხილვიდან კლასიკურ მექანიკაში (იხ. I), დიდ პრობლემას არ წარმოადგენს.

რომ ჩვენ კლასიკური ელექტროდინამიკის აღწერისას (იხ. III-5) ვიყენებთ ჰევისაიდის ერთეულთა სისტემას კულონის პოტენციალში ჩნდება დამატებითი მამრავლი $1/4\pi$.

5. ნაწილაკები გრავიტაციულ ველში.

შევჩერდეთ ახლა ნაწილაკის მოძრაობაზე გარე გრავიტაციულ ველში, რომლის თვისებებს (სხვა ველების თვისებებთან ერთად) ჩვენ უფრო დეტალურად განვიხილავთ მოგვიანებით (იხ. III). ელექტრომაგნიტურ ველთან განსხვავებით გრავიტაციული ველი ყოველთვის ახდენს გავლენას ნაწილაკის მოძრაობაზე – ელექტრულად ნეიტრალურია ის თუ დამუხტული – საკმარისია მას გააჩნდეს არანულოვანი ენერგია.

ა) *ქმედება და მოძრაობის განტოლებები.*

ჩვენ მივყვებით ამ შემთხვევაშიც იგივე ლოგიკას, რომელიც გამოვიყენეთ ნაწილაკის ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედების აღწერის დროს – ავაგებთ ამ ურთიერთქმედების ლაგრანჟიანს და ქმედებას, შემდეგ ვიპოვით ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებებს, და ბოლოს განვიხილავთ ამ მოდელს ნიუტონის ზღვარში, რომ დავწრმუნდედ რომ მთლიანი მიდგომა არა წინაღმდეგობრივია და იმავდროულად თანხვედრაშია ექსპერიმენტთან.

გრავიტაციული ველი, როგორც ვიცით (იხ. ნაწილი I), არსებითად წარმოდგენილია ზოგად მეტრიკულ ტენზორში $g_{\mu\nu}(x)$, რომელიც განაპირობებს მრუდე 4-განზომილებიანი აინშტაინის დრო-სივრცის მეტრიკულ თვისებებს. სუსტი გრავიტაციული ველის შემთხვევაში ეს ტენზორი მიახლოვებულია მინკოვსკის ტენზორთან

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) + O(h^2) \quad . \tag{48}$$

გასაგებია რომ უმარტივეს ზოგად-კოვარიანტული სიმეტრიის მქონე ლაგრანჟიანს, რომელიც აღწერს თვით ნაწილაკს და იმავდროულად მის ურთიერთქმედებას გარე გრავიტაციულ ველთან უნდა ჰქონდეს სახე[2]

---

[2] მეორეს მხრივ, ეს სახე ავტომატურად გამოდის თუ თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟიანში (13'') გადავალთ აინშტაინის მრუდ სივრცეში $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x)$.

$$\zeta_{grav}(x) = T^{\mu\nu}(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{49}$$

მართლაც, ნაწილაკის ენერგია-იმპულსის გამოსახულებიდან (34) გამომდინარე ვღებულობთ სუსტი გრავიატაციული ველის მიახლოვებაში (იხ. (48))

$$\zeta_{grav}(x) = \zeta_0(x) + T^{\mu\nu}(x) h_{\mu\nu}(x) + O(h^2) \tag{50}$$

სადაც პირველი წევრი, ისევე როგორც ელექტრომაგნიტურ ლაგრანჟიანში (37), აღწერს თავისუფალ ნაწილაკს, მეორე და დანარჩენი წევრები კი მის გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას.

ზოგადად ენერგია-იმპულსის ტენზორის სტრუქტურის (34) გათვალისწინებით მივდივართ ქმედებამდე[3]

$$S = \int d^4x\, \zeta_{gr}(x) \quad \longrightarrow \quad S = \int d\tau\, L_{gr}(\dot{x}^{\mu}, g_{\mu\nu}) \tag{49'}$$

სადაც ‘‘ინტეგრირებული’’ ლაგრანჟიანი L_{gr} არის

$$L_{gr} = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} \tag{49''}$$

მეტრიკაში მითითებული არგუმენტი $x(\tau)$ ნიშნავს რომ გრავიტაციული ველი მოქმედებს ზუსტად ნაწილაკის შესაძლო ტრაექტორიის გასწვრივ, რაც ავტომატურად გამოდის ლაგრანჟიანის x-ინტეგრირების შემდეგ.

საბოლოოდ, ქმედების ვარიაციის შედეგად ვღებულობთ ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას გრავიტაციულ ველში

[3] თუმცა თვით ინფინიტიზემალური მოცულობა d^4x არ არის ინვარიანტი ზოგად-კოვარიანტული გარდაქმნების მიმართ მაგრამ მისი კომბინაცია 4-განზომილებიან დელტა ფუნქციასთან $\delta^4(x - x(\tau))$ (რომელიც ჩნდება (49’)-ში ნაწილაკის ენერგია-იმპულსის გამოსახულებიდან (34)) ინვარიანტული სიდიდეა (იხ. ამოცანა 10, ნაწილი I, თავი II).

$$\frac{\partial L_{gr}}{\partial x^{\rho}(\tau)} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_{gr}}{\partial \dot{x}^{\rho}(\tau)} = 0 \qquad \Rightarrow \tag{51}$$

$$g_{\mu\nu,\rho}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} - 2\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\rho}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\ddot{x}^{\lambda} + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right)\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0$$

სადაც ჩვენ ბოლო გამოსახულების მიღებისას - გამოვიყენეთ რომ $\dot{g}_{\mu\rho} = g_{\mu\rho,\nu}\dot{x}^{\nu}$, მერე მოვახდინეთ სიმეტრიზაცია გაჩენილი $g_{\mu\rho,\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}$-წევრისა და ბოლოს გავამრავლეთ მთლიანი განტოლება $g^{\rho\lambda}/2$ -ზე. თუ ახლა გავიხსენებთ კავშირს მეტრიკასა და აფინურ ბმულობას შორის (იხ. ნაწილი I, II-(36))

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right) \tag{52}$$

მივიღებთ იმას რასაც ალბათ თავიდანვე ველოდით

$$\ddot{x}^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0 \tag{53}$$

ანუ გეოდეზიური წირის განტოლებას (ნაწილი I, II-(23)). სწორედ ეს განტოლება, როგორც ცხადათ ჩანს, განსაზღვრავს ნაწილაკის მოძრაობას გრავიტაციულ ველში, ან სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, აინშტაინის მრუდე სივცე-დროში.

მართლაც, ჩვენ შეგვეძლო ქმედების ვარიაციის მაგივრად უშუალოდ მოგვეთხოვა ნიუტონის განტოლების სამართლიანობა თავისუფალი ნაწილაკისთვის $\ddot{x}^{\mu} = 0$ (იხ. (25’’’)) მრუდე სივრცეშიც. ამისთვის კი საჭიროა რომ ნაწილაკის აჩქარების ვექტორი იყოს განსაზღვრული როგორც ჭეშმარიტი ვექტორი ამ სივრცეში, ანუ მისი სიჩქარის წარმოებული უნდა შეიცვალოს კოვარიანტული წარომებულით. ზუსტად ესაა ასახული ზემოთ მოყვანილ განტოლებაში (53).

ბ) *ნიუტონის ზღვარი.*

ახლა დავწრმუნდეთ რომ ზოგად-კოვარინტული მიდგომა გრავიტაციაში გვაძლევს სწორ შედეგს ნიუტონის გრავიტაციის ზღვარზე. ამ ძღვარზე გადასლვლა შეიცავს სამ საზასღვრო ნაბიჯს:

1/ სუსტი გრავიტაცია $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) + O(h^2)$, ანუ *აინშტაინის სივრციდან მიახლოვებულ მინკოვსკის სივრცეზე გადასვლა.*

2/ არარელატივისტური ზღვარი ნაწილაკისთვის $v << c$, *ანუ მიახლოვებული მინკოვსკის სივრციდან მიახლოვებულ გალილეეს სივრცეზე გადასვლა.* მაშინ ზოგადად ინტერვალისთვის გვაქვს

$$c^2 d\tau^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x))dx^\mu dx^\nu = (1 + h_{00})c^2 dt^2 + h_{0i} cdtdx_i + (-\delta_{ij} + h_{ij})dx_i dx_j$$

საიდანაც საკუთარი და ლაბორატორული დროების შეფარდებისთვის ვღებულობთ

$$\frac{d\tau}{dt} \cong 1 + h_{00}/2 + O(v/c) \quad . \tag{54}$$

ამას გარდა გეოდეზიური წირის განტოლება (52) მიიღებს ამ ზღვარში სახეს

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00} c^2 (dt/d\tau)^2 \cong 0 \tag{55}$$

სადაც ჩვენ ასევე უგულვებელყავით $O(v/c)$ რიგით დათრგუნული წევრები ამ განტოლებაში. ამრიგად მიახლოვებით არარელატივისტურ ზღვარზე მნიშვნელოვანია მხოლოდ h-ტენზორის წმინდა დროის კომპონენტი h_{00}.

3/ *სტატიკური ზღვარი გრავიტაციული ველისთვის* - ანუ მივიღებთ რომ მეტრიკული ტენზორი $g_{\mu\nu}(x)$ არ არის დროზე დამოკიდებული (თუმცა წინა ორი პუნქტიდან გამომდინარე საკმარისია რომ ეს მიახლოება იყოს ძალაში მხოლოდ h_{00} კომპონენტისთვის). ამრიგად აფინური ბმულობის კოეფიციენტებისთვის Γ^i_{00} - შემავალ ძირითად მოძრაობის განტოლებაში (55) - ვღებულობთ (იხ. (52))

$$\Gamma^{i}_{00} = \frac{1}{2} g^{i\rho}\left[g_{\gamma 0,0} + g_{\gamma 0,0} - g_{00,\rho}\right] = -\frac{1}{2} g^{ii} g_{00,i} \cong \frac{1}{2} h_{00,i} \qquad (56)$$

რომელიც საბოლოოდ (ლაბორატორულ დროში გადასვლისას, იხ. (54)) ღებულობს სახეს

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial x^i} h_{00} \quad . \qquad (57)$$

თუ ახლა გავამრავლებთ ამ განტოლებას ნაწილაკის მასაზე m და გავაიგივებთ ნიუტონის გრავიტაციის პოტენციალს U სიდიდესთან

$$U(x) = \frac{c^2}{2} h_{00}(x) \qquad (58)$$

მივიღებთ ზუსტად ნიუტონის მეორე კანონს მასიური ნაწილაკისთვის, რომელიც იმყოფება ამ პოტენციალის ველში

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -m\frac{\partial}{\partial x^i} U(x) \quad . \qquad (59)$$

აღსანიშნავია, რომ ამ განტოლების მარცხენა მხარეს მყოფი მასა m მოიაზრება როგორც ინერტული მასა, ხოლო მარჯვენა მხარეს კი - როგორც გრავიტაციული მასა. ეს ნიშნავს, რომ ჩვენი ზოგად-კოვარიანტული მიდგომა ავტომატურად აკმაყოფილებს *სუსტი ეკვივალენტობის პრინციპს* ამ მასების ბუნებრივი ტოლობის შესახებ.

გ) *გრავიტაციული პოტენციალი.*

დავაზუსტოთ რომ ნიუტონის სტანდარტულ გრავიტაციასთან განსხვავებით ჩვენ არ შემოგვიყვანია რაიმე გრავიტაციული ტიპის ძალა ჩვენ მოდელში – ის თავისთავად ჩნდება ნაწილაკის მოძრაობისას ზოგადი მეტრიკის (48) მქონე სივრცეში.

ამაზე მეტიც, სრულ აინშტაინის თეორიაში, რომელსაც ჩვენ დეტალურად შევისწავლით შემდგომ (ნაწილი III) თვით $U(x)$ პოტენციალის სახეც შეიძლება იქნას ზუსტად დადგენილი. მართლაც აღმოჩნდება რომ ეს პოტენციალი ნიუტონის

ზღვარში აკმაყოფილებს იგივე ტიპის *პუასონის განტოლებას*, რომელსაც აკმაყოფილებდა ელექტრომაგნიტური პოტენციალი (**იხ**. (44))

$$\nabla^2 U(x) \;=\; G\rho \qquad (\nabla^2 = \partial_i^2) \tag{60}$$

სადაც G ნიუტონის გრავიტაციული კონსტანტაა, რომელიც შეიძლება გამოისა**ხ**ოს პლანკის მასის საშუალებით

$$G = \frac{1}{M_P^2} \approx 10^{-38}Gev^{-2} \tag{61}$$

ხოლო ρ კი გრავიტირებადი ს**ხ**ეულის მასის სიმკვრივე. თუ, ისევე როგორც ელექტრომაგნიტურ ურთიერთქმედების შემთ**ხ**ვევაში, მივიღებთ რომ ეს ს**ხ**ეული მასიური წერტილოვანი ობიექტია და იმყოფება კოორდინატთა სათავეში მაშინ

$$\rho = M\delta(\vec{r})$$

სადაც M ამ მასის მნიშვნელობაა. ამ პირობებში განტოლება (60) ადვილად ი**ხ**სნება და გვაძლევს ანალოგიურად შემდეგი სა**ხ**ის ცენტრალურ-სიმეტრიულ პოტენციალს $U(r)$

$$U(r) = -\;\frac{GM}{4\pi r} \qquad (r = |\vec{r}|) \tag{62}$$

რაც წარმოადგენს *ნიუტონის პოტენციალის ცნობილი გამოსა**ხ**ულებას.*

თუ ჩავსვავთ ა**ხ**ლა ამ გამოსა**ხ**ულებას განტოლებაში (59) მივიღებთ ჩვენი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას M მასით გამოწვეულ სტატიკურ და ცენტრალურ-სიმეტრიული გრავიტაციულ ველში

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \;\; GmM\,\frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \tag{63}$$

რაც თვისობრივად არ განს**ხ**ვავდება დამუ**ხ**ტული ნაწილაკის მოძრაობისაგან სტატიკურ კულონურ ველში. ნიშანდობლივია, რომ აქ e და Q მუ**ხ**ტების როლს თამაშობენ მასები m და M შეფარდებული პლანკის მასასთან,

$$GmM = \frac{m}{M_P}\frac{M}{M_P} = g_m g_M \quad . \qquad (64)$$

ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია გამოსახოთ მოძრაობის განტოლება (59) უგანზომილებო g_m და g_M კონსტანტების საშუალებით

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \quad g_m g_M \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \qquad (65)$$

სადაც ანალოგია ‘‘ელექტრომაგნიტურ’’ მოძრაობის განტოლებასთან (47) უფრო მკვეთრი და შთამბეჭდავია.

მაგრამ ამასთან ერთად არის ორი პრინციპული განსხვავებაც. პირველი ის რომ ეს უგანზომილებო კონსტანტები ბევრი რიგით მცირეა ელექტრომაგნიტურ კოსტანტებზე, რაც განაპირობებს გრავიტაციული ურთიერქმედების ანომალურ სიმცირეს მიკროსამყაროში. მაგალითად, ელექტრონისთვის, რომლის მასაა 0,5 MeV, უგანზომილებო გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური კონსტანტების შეფარდება გამოდის

$$e = \sqrt{4\pi/137} \approx 0.3 \quad , \quad g_m = m_e / M_P \approx 5\times10^{-23} \quad , \quad g_m / e \approx 1.6\times10^{-22}$$

.

ამიტომ გრავიტაციული ურთიერთქმედების რეალური გამოვლინება ნიუტონის ზღვარში ხდება მხოლოდ მაშინ როცა განვიხილავთ საკმაოდ მასიურ მაკროსკოპულ სხეულებს.

მეორე განსხვავება დაკავშირებულია იმასთან რომ გრავიტაციული კონსტანტები ყოველთვის დადებითი ნიშნისაა, ანუ გრავიტაციული ურთიერქმედება განაპირობებს მხოლოდ სხეულთა მიზიდულობას განსხვავებით ელექტრომაგნიტურ ურთიერქმედებასთან, სადაც გამომდინარე ელექტრული მუხტების შეფარდებითი ნიშნიდან განზიდულობაც ამგვარადვე შესაძლებელია.

ამოცანები.

1. იპოვეთ ლორენცის გარდაქმნების გენერატორების ცხადი სახე. დაამტკიცეთ რომ ეს გენერატორები აკმაყოფილებენ კომუტატორებს

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = \eta_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} + \eta_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma} - \eta_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta}$$

2. იპოვეთ ტრანსლიაციების გენერატორების ცხადი სახე. დაამტკიცეთ რომ ეს გენერატორები აკმაყოფილებენ კომუტატორებს

$$[M_{\alpha\beta}, P_{\gamma}] = \eta_{\beta\gamma} P_{\alpha} - \eta_{\alpha\gamma} P_{\beta} \qquad , \qquad [P_{\alpha}, P_{\beta}] = 0$$

3. იპოვეთ თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟიანი თუ მის ქმედებას აქვს სახე

$$S = a \int_{\tau_1}^{\tau_2} dr$$

სადაც სადაც a ნებისმიერი კონსტანტაა, ხოლო r კი ინტერვალია ორ ხდომილებას შორის ევკლიდურ სივრცეში.

5. ამოხსენით შემდეგი ამოცანა ფუნქციის პირობით ექსტრემუმზე: ტოლი პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებს შორის რომელს გააჩნია მაქსიმალური ფართი?

6. δ ფუნქციის ინტეგრალური წარმოდგენის გამოყენებით

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk$$

შეამოწმეთ მისი შემდეგი თვისებები:

ა) $\delta(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$

ბ) $\delta(a\,x)=\frac{1}{a}\delta(x)$

გ) $\delta(-x)=-\delta(x) \qquad x\delta(x)=0$

დ) $\int f(x)\delta(x)=f(0)$
$\int f(x)\delta(x-a)=f(a)$

ე) $\delta(f(x))=\sum_i\left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}\delta(x-x_i)$ სადაც x_i $f(x)=0$ განტოლების ფესვებია.

ვ) $\delta(x_\mu)=\delta(x_0)\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$

ზ) $\frac{d}{dx}[\delta(x)]=-\frac{\delta(x)}{x}$

7. მიიღეთ ჰამილტონ-იაკობის რელატივისტური განტოლებიდან

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]=m^2c^2$$

მისი არა-რელატივისტური ანალოგი.

8. შეამოწმეთ, რომ ნაწილაკების 4-დენი

$$j^\mu=c\sum_i\int d\tau_i\,\frac{dx_i^\mu}{d\tau_i}\delta^4(\vec{x}-\vec{x}_i(\tau_i))$$

მიიღება ორი სიმკვრივისაგან (30).

<u>დაამტკიცეთ</u>:

რომ ის გარდაიქმნება როგორც 4-ვექტორი;

მისი შენახვა $\partial_\mu j^\mu = 0$ ნიშნავს ნაწილაკების რაოდენობის შენახვას

$$\frac{dN}{dt} = 0 \quad (\text{სადაც} \;\; N = \int d^3 x j^0(x) \;).$$

9. გამოიყვანეთ ენერგია-იმპულსის ტენზორის ფორმულა (34) 4-ტრანსლიაციების სიმეტრიიდან. შეამოწმეთ, რომ ის ინახება, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$.

10. შეამოწმეთ, რომ ლორენცის გარდაქმნისას
$$d^4 x' = d^4 x \quad (d^4 x = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3).$$

11. შეამოწმეთ, რომ ლორენცის გარდაქმნისას

$$\delta^4(x') = \delta^4(x) \quad (\delta^4(x) = \delta(x_0)\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3).$$

III. ველები

1. მოტივაცია.

ა) *ურთიერთქმედების კონცეფცია სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში.*

ელემენტარული ნაწილაკებისა ან სხვა ფიზიკური ობიექტების ურთიერთქმედება არ შეიძლება აღწერილ იქნას ჩვეულებრივი (კლასიკური მექანიკის) პოტენციალის მეშვეობით სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში, რადგან ასეთი აღწერა გულისხმობს ურთიერთქმედების უსასრულოდ დიდი სიჩქარით გადაცემას. აღმოჩნდა რომ ეს ურთიერთქმედება შეიძლება აღვწეროთ ველის ცნების მეშვეობით. თუ ზოგადად მათემატიკაში ან ფიზიკაში ველი ნიშნავს გარკვეული ცვლადების ნებისმიერ ანალიზურ ფუნქციას, რაც უბრალოდ აღწერის საშუალებაა და მეტი არაფერი (მაგ., ტემპერატურების ველი $F(T,T',T''...)$) ფარდობითობის თეორიაში ურთიერთქმედების გავრცელების სიჩქარის სასრულობის გამო ველი გადაიქცევა ფიზიკურ რეალობად.

ბ) *ნაწილაკთა რიცხვის არშენახვა.*

ველის ყველასათვის კარგად ცნობილი მაგალითია ელექტრომაგნიტური ველი, რომელიც აღწერს ელექტრულად დამუხტული ნაწილაკების ურთიერთქმედებას. ელექტრომაგნიტური ველის კლასიკურ აღწერას, რომელიც ემყარება მაქსველის განტოლებებს, მივყავართ ტალღურ წარმოდგენებამდე ელექტრომაგნეტიზმის შესახებ. მეორესმხრივ, მცირე მანძილებზე (სუბატომურ ფიზიკაში) ხშირად ხდება აუცილებელი ელექტრომაგნიტური ველი (უწყვეტი სისტემა) განვიხილოთ დისკრეტული (ნაწილაკოვანი) სისტემის სახით, რომელსაც გააჩნია უსასრულოდ დიდი თავისუფლების ხარისხის რიცხვი. კორპუსკულური თვალსაზრისით, ველს შეესაბამება ენერგიის დისკრეტული კვანტები; ამასთან ამბობენ, რომ ელექტრომაგნიტური კვანტები (ფოტონები) ნაწილაკებია, რომლებსაც გადააქვთ ელექტრულად დამუხტული ნაწილაკების ურთიერთქმედება

ერთმანეთთან. ანალოგიურად, ტალღურ-კორპუსკულური წარმოდგენის თანახმად სხვა ელემენტალური ნაწილაკებიც – ელექტრონები, კვარკები, ნეიტრინო და ა.შ. – ფოტონების მზგავსად აღიწერება ველების მეშვეობით და მათ გარდა წმინდა კორპუსკულური თვისებებისა გააჩნიათ ტალღური თვისებებიც.

ამავდროულად მაღალი ენერგიების ნაწილაკებისთვის, რომელთათვისაც $E >> m$ დამახასიათებელია დაბადება, გაქრობა, ან სხვა ნაწილაკებში გარდაქმნა. რაც ნაწილაკთა რიცხვის არშენახვას ნიშნავს. გამომდინარე აქედან ნაწილაკთა რიცხვი, განსხვავებით არარელიტისტურ კლასიკურ მექანიკისგან, აღარ არის მოძრაობის ინტეგრალი. ეს გარემოება ასევე ითხოვს არაწინაღმდეგობრივი აღწერისათვის ნაწილაკების მაგივრად შესაბამისი ველების შემოყვანას რადგან ყოველი ველი ერთდროულად აღწერს მასთან დაკაშირებული ნაწილაკების უსასრულო რაოდენობას.

2. ველის მოძრაობის განტოლება.

ა) *ველის კონცეფცია.*

თუ ველს განვიხილავთ როგორც მექანიკურ სისტემას თავისუფლების ხარისხთა უსასრულოდ დიდი რიცხვით, შეიძლება ავაგოთ ველის თეორია წერტილის კლასიკური მექანიკის ანალოგიით. ამ დროს ველი ხასიათდება ე.წ. ველის ფუნქციით $F(x)$, რომელიც შეესაბამება თავისუფლების ხარისხთა უსასრულოდ დიდ რიცხვს. ველი $F(x)$ შეიძლება იყოს ნებისმიერი საკმარისად ანალიზური ფუნქცია.

განვიხილოთ ტალღური ველებიდან უმარტივესი - სკალარული ველი. ჩვენ შევჩერდებით სკალარული ველის ორ ვარიანტზე:

(i) ნამდვილი სკალარული ველი, რომელიც აღწერს ნეიტრალურ უსპინო ნაწილაკებს $\varphi(x)$. ფურიეს ინტეგრალის მეშვეობით გადავწეროთ იგი იმპულსურ წარმოდგენაში

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4k\, e^{ik_\mu x^\mu}\,\Phi(k) \qquad (1)$$

ეს არის ბრტყელი $e^{ik_\mu x^\mu}$ ტალღების სუპერპოზიცია, სადაც ყოველი ტალღა არის $\Phi(k)$ წონით წარმოდგენილი.

(ii) კომპლექსური სკალარული ველი, რომელიც აღწერს დამუხტულ უსპინო ნაწილაკებს

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$$

განსხვავება კომპლექსურ სკალარულ ველსა და ნამდვილ სკალარულ ველს შორის მდგომარეობს იმაში, რომ კომპლექსური სკალარული ველი აღიწერება ორი დამოუკიდებელი ნამდვილი ფუნქციით φ_1 და φ_2, რაც ნიშნავს დამატებით თავისუფლების ხარისხს, რომელიც ნაწილაკის მუხტში აისახება (იხ. 5.). ამასთან, კოპლექსურად შეუღლებელი ველები, φ და φ^*, აღწერენ საწინაღმდეგო მუხტის

ნაწილაკებს. განსხვავებით, რეალური სკალარული ველი შეიცავს მხოლოდ ერთ კომპონენტს და აღწერს ნეიტრალურ ნაწილაკს.

(iii) გარდა ნაწილაკებისა, რომლებიც აღიწერება სკალარული ველით, არსებობს ნაწილაკები რომლებიც აღიწერება ვექტორული ან ტენზორული ველებითაც.

ვექტორული ველის აღმწერი ფუნქცია შედგება ოთხი კომპონენტისაგან $A_\mu(x)$, რომლებიც ერთობლიობაში ქმნიან ზოგად კოვარიანტულ 4-ვექტორს, ე.ი. ლორენცის გარდაქმნისას $x'^k = x^k + \delta x^k \quad \delta x^k = \omega^{kn} x_n \qquad \omega^{kn} + \omega^{nk} = 0$ ის გარდაიქმნება $u_k'(x') = u_k(x) + \delta u_k \quad \delta u_k = \omega^{kn} u_n(x)$ ფორმულების შესაბამისად.

ბ) *ლაგრანჟიანის სიმკვრივე და ქმედება.*

ველის განტოლებები და მათი ინვარიანტები უშუალოდ მიიღება ლაგრანჟის ფუნქციიდან. იგი დროის ფუნქციაა და კლასიკურ მექანიკაში ჩაიწერება ჯამის სახით სისტემის ყველა მატერიალური წერტილების მიხედვით. სპეციალური ფარდობითობის თეორიაში ტალღური ველის მაგვარი უწყვეტი სისტემისათვის ეს ჯამი გამოისახება ლაგრანჟის ფუნქციის სიმკვრივიდან სივრცითი ინტეგრალით:

$$L(x') = \int d\vec{x}\, \zeta\left(x^0, \vec{x}\right) \tag{2}$$

სადაც ლაგრანჟის ფუნქციის სიმკვრივე $\zeta\left(x^0, \vec{x}\right) = \zeta(x)$ თანაბრად დამოკიდებულია ოთხივე სივრცე-დროით ცვლადზე. მომავალში ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ ტერმინ ლაგრანჟიანს ლაგრანჟის ფუნქციის სიმკვრივის მაგივრად.

ჩამოვაყალიბოთ ეხლა ის ძირითადი მოთხოვნები, რაც ედება ლაგრანჟიანს:

(1) *რელატივისტური ინვარიანტობა.*
(2) *ველის არაუმეტეს პირველი რიგის წარმოებულებისა (რომ შესაბამისი მოძრაობის განტოლებები შეიცავდნენ ველის არაუმეტეს მეორე რიგის წარმოებულებისა).*
(3) *ლაგრანჟიანი არ უნდა იყოს ცხადად დამოკიდებული 4-კოორდინატაზე* x^μ *(რადგანაც ვიხილავთ ჩაკეტილ სისტემას).*
(4) *ლაგრანჟიანის ერმიტულობა (რეალობა), რომლის თანახმად ქმედება, როგორც სისტემის ფიზიკური მახასიათებელი, იყოს რეალური.*
(5) *ლაგრანჟიანის ანალიზურობა ველების (როგორც ცვლადების) მიმართ (მაგ., არ შეიცავდეს ფესვებს, პოლუსებს ან სხვა რაიმე სინგულარობებს).*

(6) *ლაგრანჟიანის მინიმალობა (სიმარტივე), რომლის თანახმად ლაგრანჟიანში შემავალი წევრები უნდა იყვნენ მაქსიმუმ მეოთხე ხარისხის პოლინომები ველების მიმართ.*

გ) *ლაგრანჟიანი და ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები.*

გამომდინარე ამ პრინციპებიდან მივიღოთ ეხლა ლაგრანჟიანი კომპლექსური სკალრული ველისათის $\varphi(x)=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$ (რეალური სკალარული ველის შემთხვევა, როგორც უფრო მარტივი ვერსიაა, მიიღება აქედან თუ ავიღებთ $\varphi_2=0$). ისევე როგორც კლასიკურ მექანიკაში მივიღებთ რომ ლაგრანჟიანი $\zeta(x)$ ველის ცვლადების და მათი პირველი წარმოებულების ნამდვილი ფუნქციაა:

$$\text{ლაგრანჟიანი} \quad \zeta(\varphi,\partial_\mu\varphi) \quad \rightarrow \quad \text{ქმედება} \quad S=\int d^4x\zeta(\varphi,\partial_\mu\varphi)\ . \qquad (3)$$

თუ შევადარებთ კლასიკური მექანიკის შემთხვევას ჩვენ ფაქტობრივად მოვახდინეთ შეცვლა

$$dt\rightarrow dx_\mu\ ,\ \ q\rightarrow\varphi\ ,\ \ \dot{q}\rightarrow\partial_\mu\varphi \qquad (3')$$

ავრნიშნოთ რომ იმ ერთეულთა სისტემაში სადაც ქმედება S უგანზომილებოა ლაგრანჟიანს ζ გააჩნია მასის მეოთხე ხარისხის განზომილება.

საბოლოოდ, ზემოთაღნიშნულ პრინციპებს (1)-(6) თავისუფალი კომპლექსური სკალარული ველისათვის მივყევართ შემდეგ მარტივ ლორენც-ინვარიანტულ ლაგრანჟიანამდე

$$\zeta=\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi+\aleph\varphi^*\varphi \qquad (4)$$

სადაც $\aleph$ - ჯერჯერობით ნებისმიერი (მასის კვადრატის განზომილების) კონსტანტაა. დავწეროთ ეხლა შესაბამისი *ეილერ-ლაგრანჟის ან მოძრაობის განტოლება* (ვარიაცია მოვახდინეთ φ^*-ველის მიმართ, რომ მივიღოთ განტოლება φ-ველისათვის):

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi^*}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\zeta}{\partial(\partial^\mu\varphi^*)}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \Box\varphi-\aleph\varphi=0 \tag{5}$$

სადაც

$$\Box\equiv\eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu=\partial^\mu\partial_\mu .$$

ამ განტოლების კერძო ამონახსნია $\varphi=\Phi(k)e^{ik^\mu x_\mu}$. უშუალო ჩასმით მივიღებთ, რომ

$$\left(k^2-\aleph\right)\Phi(k)=0 .$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\aleph=-m^2$, სადაც m^2 განვიხილავთ როგორც ველის მასას (რადგან $k^2=m^2$), მაშინ ტალღური განტოლების (5) ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\varphi(x)=\int d^4k\,\Phi(k)e^{ikx}\delta\left(k^2-m^2\right) . \tag{6}$$

ამ ამონახსნიდან ჩანს, რომ ბრტყელი ტალღების სუპერპოზიცია შეესაბამება m მასის (და ყველა 4-იმპულსის k_μ რომლისთვის $k^2=m^2$) მქონე თავისუფალ ნაწილაკებს.

დ) *ანალოგია ოსცილატორთან (1+1 განზომილება).*

ველის მოძრაობის განტოლება (5) ძალიან მოგვაგონებს კლასიკური ოსცილატორის განტოლებას. მართლაც, ოსცილატორის ლაგრანჟიანია

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-kx^2 \tag{7}$$

(სადაც k – მუდმივი პარამეტრია). შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებება არის

$$m\ddot{x}+kx=0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}+\omega^2x=0, \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8}$$

ამ განტოლების ზოგად ამონახსნია

$$x = \mathrm{Re}\left(Ae^{i\omega t}\right) \tag{9}$$

სადაც $A = ae^{i\alpha}$ კომპლექსური ამპლიტუდაა. ამრიგად თავისუფალი ველი სტრუქტურულად მოგვაგონებს ოსცილატორების ერთობლიობას.

3. გეომეტრიული და შინაგანი სიმეტრიები.

ა) *<u>ენერგია-იმპულსის ტენზორი</u>*.

იმის გამო რომ ჩვენ ზოგადად ვიხილავთ ველების ჩაკეტილ სისტემას (იხ. ზემოდ 2-ბ, პრინციპი (3)) 4-კოორდინატა x_μ განიხილება როგორც ციკლური ცვლადი. ამიტომ ლაგრანჟიანის წარმოებული ამ კორდინატის მიმართ იქნება:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\partial_\mu \varphi + \frac{\partial \zeta}{\partial(\partial_\nu \varphi)}\partial_\mu \partial_\nu \varphi + h.c. \tag{10}$$

სადაც $h.c.$ ნიშნავს ერმიტულად (კომპლექსურად) შეუღლებულ წევრებს, რადგან გასაგებია რომ ლაგრანჟიანის სრული ვარიაცია უნდა შეიცავდეს დამოუკიდებელ ვარიაციებს φ და φ^* (და მათი წარმოებულების) მიმართ. პირველი წევრი ამ განტოლებაში მოძრაობის განტოლების (5) გამოყენების შემდეგ გადავა ველის წარმოებულის მიმართ ვარიაციის წევრში

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \zeta}{\partial(\partial_\nu \varphi)}\partial_\mu \varphi \tag{11}$$

(და შესაბამისად იგივე მოხდება ანალოგიური φ^*-ველზე დამოკიდებული წევრისთვისაც). ამიტომ განტოლება (10) გადაიწერება როგორც

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial(\partial_\nu \varphi)}\partial_\mu \varphi + \frac{\partial \zeta}{\partial(\partial_\nu \varphi^*)}\partial_\mu \varphi^* - g_\mu^\nu \zeta\right] = 0 \tag{12}$$

აქედან გამომდინარე - ტენზორი

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial\zeta}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\partial_\mu\varphi + \frac{\partial\zeta}{\partial(\partial_\nu\varphi^*)}\partial_\mu\varphi^* - g_\mu^\nu\zeta \qquad \Rightarrow \tag{13}$$

$$T_{\{\mu\nu\}} = (\partial_{\{\mu}\varphi^*)(\partial_{\nu\}}\varphi) - g_{\mu\nu}\zeta$$

ინახება. ეს ტენზორი – კომპლექსური ველის ენერგია-იმპულსის (სიმეტრიზებული) ტენზორია, ხოლო $P_\nu = T_{0\nu}$ მისი 4-იმპულსია. კერძოდ, ენერგიისათვის $P_0 = T_{00}$ ვღებულობთ

$$T_{00} = \frac{\partial\zeta}{\partial(\partial_0\varphi)}\partial_0\varphi + \frac{\partial\zeta}{\partial(\partial_0\varphi^*)}\partial_0\varphi^* - \zeta$$

რაც უთუოდ მოგვაგონებს ენერგიის გამოსახულებას კლასიკურ მექანიკაში

$$E = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 q)}\partial_0 q - L$$

ჩაწერილს განზოგადებულ კორდინატებში $q(t)$.

ეხლა დავადგინოთ რა სიმეტრია დგას ამ სიდიდეების შენახვის მიღმა. ζ-ლაგრანჟიანში 4-კოორდინატის x_μ ციკლიურ ცვლადად გამოცხადება ნიშნავს რომ ლაგრანჟიანი ინვარიანტულია ამ კოორდინატის ყველა შესაძლო გარდაქმნების მიმართ, რაც სპეციალური ფარდობითობის თეორიის ფარგლებში შეიცავს ლორენცის ჯგუფის გარდაქმნებს პლუს 4-ტრანსლაციები, რომლებიც ერთად შეადგენენ ე.წ. *პუანკარეს ჯგუფს*, ანუ

$$x^{\mu'} = \Lambda_\mu^{\mu'} x^\mu + a^{\mu'} \quad . \tag{14}$$

აქედან - ინვარიანტობა 4-ტრანსლაციების $(a^{\mu'})$ მიმართ შეესაბამება ენერგია-იმპულსის $T^{\mu\nu}$ შენახვას (და ამასთან 4-იმპულსის შენახვას, იხ. ამოცანა 1), ხოლო

ინვარიანტობა ლორენცის გარდაქმნების მიმართ ნიშნავს, შესაბამისად, ჩვეულებრივი ბრუნვის მომენტებისა (M_{12}, M_{13}, M_{23}) და ''ბუსტის'' მომენტების (M_{01}, M_{02}, M_{03}) შენახვას. ესე იგი, ჯამში გვაქვს 10 შემნახვადი სიდიდე, როგორც კიდეც უნდა იყოს შესაბამისად სიმეტრიული $T^{\mu\nu}$ ტენზორის 10 დამოუკიდებელი კომპონენტისა ($4 \cdot 5/2 = 10$). ამ მომენტების შენახვა გამომდინარეობს შესაბამისი დენების შენახვიდან – ეს დენები აიგება ენერგია-იმპულსისა და 4-კოორდინატის x^{μ} მეშვეობით (იხ. ამოცანა 11)

$$J^{\mu,\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^{\rho} - T^{\mu\rho} x^{\nu} \quad , \quad \partial_{\mu} J^{\mu,\nu\rho} = 0 \qquad (13')$$

ძალზედ მნიშვნელოვანია მიღებული კავშირი ζ-ლაგრანჟიანის სიმეტრიასა (14) და შემნახვად სიდიდეების (13, 13') არსებობას შორის. ამ კავშირს ზოგადად განიხილავენ როგორც ე.წ. *ნიოტერის თეორემის* შედეგს. ავღნიშნოთ, რომ 4-კოორდინატის x_{μ} ციკლიურობის გამო ζ-ლაგრანჟიანში ჩვენ არ დაგვჭირდა თვით ველის $\varphi(x)$ და მისი წარმოებულის ვარიაციის დათვლა ენერგია-იმპულსის ტენზორის შენახვის დასადგენად (რომელიც ჩნდება 4-ტრანსლაციების შედეგად). ეს განსაკუთრებული შემთხვევაა. ზოგადად, ეს ვარიაციები ცხადი სახით უნდა გამოვიყენოთ. მაგალითად, მომენტის დენების (13') დასადგენად ვარიაციების სახე, დაკავშირებული ლორენც-გარდაქმნებთან, თამაშობს გადამწყვეტ როლს. იგივე სიტუაციაა, როცა საქმე გვაქვს შინაგან სიმეტრიებთან.

გ) *ფაზური გარადქმნები და დენის შენახვა*.

როგორც შეიძლება ადვილად ინახოს, ლაგრანჟიანს (4), გარდა პუანკარეს სივრცე-დროის სიმეტრიისა (14), გააჩნია ე.წ. შინაგანი სიმეტრია ფაზური გარდაქმნების მიმართ

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi \ , \ \varphi^{*} \to \varphi^{*} e^{-i\alpha} \qquad (15)$$

სადაც ჯერჯერობით მუდმივი ფაზა α იგულისხმება. ეს გარდაქმნები შეადგენენ ე.წ. გლობალური *U(1)* სიმეტრიის ჯგუფის გარდაქმნებს, რომლებიც მოქმედებენ თავის საკუთარ შინაგან სივრცეში. ეს სივრცე ფაქტიურად წარმოადგენს სიბრტყეს, რომელშიც კომპლექსური ბრუნვები (15) ხორციელდება, რის შედეგადაც φ-ველის ''მიმართულება'' იცვლება, მაგრამ მისი მოდული ყოველთვის ინახება. მცირე, ანუ ინფინიტიზიმალური, გარდაქმნებისათვის გვაქვს

$$\varphi' = (1 + i\,\alpha)\varphi \qquad \varphi'^{*} = (1 - i\,\alpha)\varphi^{*} \;. \tag{15'}$$

თუ გადავალთ რეალურ კომპონენტებზე

$$\varphi = (\varphi_1 + i\,\varphi_2)/\sqrt{2}\;,\; \varphi^{*} = (\varphi_1 - i\,\varphi_2)/\sqrt{2}$$

ამ გარდაქმნებს ექნებათ სახე:

$$\varphi_i' = \varphi_i - \alpha\varepsilon_{i\,j}\varphi_j \tag{16}$$

(ε_{ij} ანტისიმეტრიული 2-განზომილებიანი ლევი-ჩევიტას ტენზორია). ამ გარდაქმნების შემდეგ ζ-ლაგრანჟიანი ასე გამოიყურება α-რიგის მიახლოვებაში:

$$\zeta\left(\varphi_i - \alpha\varepsilon_{i\,j}\varphi_j, \partial_\mu\left[\varphi_i - \alpha\varepsilon_{i\,j}\varphi_j\right]\right) = \zeta\left(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i\right) + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi_i}\left[-\alpha\varepsilon_{i\,j}\varphi_j\right] + \frac{\partial\zeta}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_i\right)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[-\alpha\varepsilon_{i\,j}\varphi_j\right]\right) +$$

$$+ O\left(\alpha^2\right) = \zeta\left(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\zeta}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_i\right)}\left[-\alpha\varepsilon_{i\,j}\varphi_j\right] + \frac{\partial\zeta}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_i\right)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[-\alpha\varepsilon_{i\,j}\varphi_j\right]\right) + O\left(\alpha^2\right) =$$

$$= \zeta\left(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i\right) + \alpha\frac{\partial}{\partial x_\mu}J^\mu$$

სადაც ჩვენ დავითვალეთ ველის ვარიაცია $\delta\varphi_i = -\alpha\varepsilon_{i\,j}\varphi_j$ (და ასევე მისი წარმოებულის ვარიაცია) და ისევ გამოვიყენეთ ველის მოძრაობის განტოლება (5) რეალური კომპონენტების ბაზისში ($i=1,2$)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi_i} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\zeta}{\partial\left(\partial^\mu\varphi_i\right)} \quad . \tag{5'}$$

ვითხოვთ რა რომ ლაგრანჟიანის სრული ვარიაცია იყოს ნოლი, $\delta\zeta = 0$, ვღებულობთ რომ ფაზური გარდაქმნების (15,16) მიმართ ლაგრანჟიანის ინვარიანტობის საპასუხოდ ინახება დენი J_μ ($\partial^\mu J_\mu = 0$)

$$J_{\mu} = -\frac{\partial \zeta}{\partial(\partial^{\mu}\varphi_{i})}\varepsilon_{ij}\varphi_{j} = -\partial_{\mu}\varphi_{i}\cdot\varphi_{j}\varepsilon_{ij} \quad . \tag{17}$$

კომპლექსური კომპონენტების (ე.წ. კარტანის) ბაზისში ეს დენი ღებულობს ფორმას

$$J_{\mu} = -i\left(\partial_{\mu}\varphi^{*}\cdot\varphi - \varphi^{*}\cdot\partial_{\mu}\varphi\right) = -i\varphi^{*}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\varphi \tag{18}$$

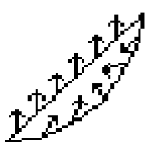
ამრიგად, მუდმივი α-ფაზის შემთხვევაში გვაქვს შენახვადი დენი J_{μ}, რომელსაც უწოდებენ *ნიოტერის დენს.* ცვალებადი ფაზის შემთხვევაში $\alpha = \alpha(x)$ ამ გარდაქმნების ჯგუფს უწოდებენ ლოკალურ *U(1)* სიმეტრიას, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ მოგვიანებით. ფაზური გარდაქმნების 1-განზომილებიან *U(1)* ჯგუფს ორივე შემთხვევაში უწოდებენ აბელის სიმეტრიას.

4. შინაგანი სივრცე.

ა) *სივრცე-დრო და შინაგანი სივრცე.*

მიღებული შეხედულების თანახმად ველის მდგომარეობა განპირობებულია, როგორც ვხედავთ, ორი სივრცის არსებობით, რომლებიც არიან – გეომეტრიული (მინკოვსკის) ბრტყელი სივრცე-დრო $M^{(4)}$ და მის ყოველ (4-კოორდინატიან) წერტილში ‘‘მიმაგრებული’’ შინაგანი სივრცე $C^{(1)}$, რომელიც ასევე ბრტყელია (ანუ არის უბრალოდ სიბრტყე, რომელშიც კომპლექსური ბრუნვები (15) ხორციელდება). მიუხედავად იმისა რომ ჩვენ განვიხილავთ სკალარულ φ-ველს ასეთ ბრტყელ გარემოში შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ რომ მცირე მანძილებზე ეს ორი სივრცე ერთიანდება ერთ კომბინირებულ სივრცეში, რომელსაც ზოგადად შეიძლება გააჩნდეს სიმრუდე. აქედან გამომდინარე წარმოსადგენი იქნებოდა გრავიტაციისა და სხვა ცნობილი ურთიერთქმედებების გაერთაიანება ერთიან კონცეპტუალურ სქემაში რადგან ეს ურთიერთქმედებები (ელექტრომაგნიტური, სუსტი და ძლიერი) იჩენენ თავს როგორც სწორედ შინაგანი სივრცის აღგზნებები.

ამას გარდა, შეიზლება ვიფიქროდ, რომ ნებისმიერი ურთიერთქმედების გაჩენა მოცემულ ბრტყელ სივრცე-დროში ახდენს გავლენას მის თვისებებზე, კერძოდ წარმოქმნის სიმრუდეს, რადგან ეს ურთიერქმედება ხასიათდება შესაბამის პროცესებში მონაწილე ნაწილაკების (ან სხვა ფიზიკური ობიექტების) მასებითა და ენერგიებით.



თუ თავიდან ურთიერთქმედება გათიშული იყო და გვქონდა სწორი მსოფლიო წირი, მაშინ ურთიერთქმედების ჩართვის შემდეგ ეს მსოფლიო წირი გაიღუნება, ანუ გაჩნდება სიმრუდე. ეს ეფექტი (და ამ ტიპის ეფექტები) შესაძლოა, ძალზედ მცირეა, მაგრამ მისი გათალისწინება ბადებს, როგორც დავინახავთ ქვემოთ, ახალს – გრავიტაციასთან დაახლოვებულ ხედვას – სხვა ურთიერთქმედებების მიმართ.

მესამე და ყველაზე პირდაპირი მოსაზრება არის ის რომ ჩვენ კომპლექსურ φ-ველს უცვლელ მოდულთან $|\varphi| = |\varphi_1^2 + \varphi_2^2|^{1/2}$ ერთად შეიძლება ქონდეს ნებისმიერი ორიენტაცია შინაგან სივრცეში, ანუ $C^{(1)}$ სიბრტყეზე. თუ ეს ორიენტაცია ყველა სივრცე-დროის წერტილში ერთი და იგივეა, მაშინ მას ფიზიკური გამოვლინება არა აქვს, რადგან ნებისმიერი ასეთი (გლობალური) ორიენტაცია ფიზიკურად არ განსხვავდება სხვა ორიენტაციისაგან. მაგრამ თუ ეს ორიენტაცია იცვლება წერტილიდან წერტილამდე, მაშინ ჩვენ უნდა ვიფიქროდ იმაზე თუ როგორ

შევადაროთ ეს ორიენტაციები ერთმანეთს. ეს პრაქტიკულად იგივე პრობლემაა, რომელიცაა მრუდე სივრცე-დროში, როცა ჩვენ ვადარებდთ ერთმანეთს პარალელური გადატანის შედეგად მიღებულ ვექტორის მიმართულებებს (და მნიშვნელობებს). ამრიგად, ამ მოსაზრების შესაბამისად, როგორც გრავიტაცია ასევე სხვა ურთიერთქმედები წარმოიშობიან სივრცე-დროის სხვადასხვა წერტილების ურთიერთობიდან. აფინური ბმულობის ტენზორი მოგვევლინედა მაშინ იმ სიდიდეთ, რომელიც განაპირობებს ამ წერტილებს შორის კომუნიკაციას, და ამ კომუნიკაციის შედეგად გაჩენილ გრავიტაციულ, ელექტრომაგნიტურ და სხვა ურთიერთქმედებებს.

ბ) *<u>პარალელური გადატანა კომპლექსური სკალარული ველისათვის</u>*.

მივიღოთ, ზემოთმოყვანილ (განსაკუთრებით, ბოლო) მოსაზრების შესაბამისად, რომ სკალარული φ-ველი განიცდის “გრავიტაციული” ტიპის წანაცვლებას პარალელური გადატანის დროს

$$\varphi_i(x \to x + \Delta x) = \varphi_i(x) - \Gamma_{i\,j\,\mu}(x)\varphi_j(x)\Delta x^\mu \tag{19}$$

სადაც აფინური ბმულობის ტენზორი $\Gamma_{i\,j\,\mu}$ უნდა იყოს ანტისიმეტრიული i და j ინდექსების მიმართ (ველის მოდული $|\varphi| = |\varphi_1^2 + \varphi_2^2|^{1/2}$ უცვლელი რომ რჩებოდეს). მისთვის უმარტივესი არჩევანი იქნება

$$\Gamma_{i\,j\,\mu}(x) = a\varepsilon_{i\,j} A_\mu(x) \tag{19'}$$

სადაც a ნებისმიერი კონსტანტაა, $\varepsilon_{i\,j}$ ლევი-ჩევიტას სიმბოლოა და $A_\mu(x)$ კი ვექტორული ველია (ჯერჯერობით ნებისმიერი).

გ) *<u>კოვარიანტული დიფერენცირება</u>*.

მივიღოთ ეხლა რომ $U(1)$ სიმეტრიის გარდაქმნები (15,16) ლოკალურია, ანუ ფაზა α დამოკიდებულია 4-კოორდინატაზე x_μ. ამ შემთხვევაში φ_i-ველების ვარიაციებისთვის ვღებულობთ

$$\delta\varphi_i = -\alpha(x)\varepsilon_{i\,j}\varphi_j \tag{20}$$

ხოლო მათი წარმოებულიბის ვარიაციებისთვის გამოდის

$$\delta\partial_\mu\varphi_i = \partial_\mu\delta\varphi_i = -\alpha(x)\varepsilon_{ij}\partial_\mu\varphi_i - \partial_\mu\alpha(x)\varepsilon_{ij}\varphi_j \quad . \tag{21}$$

როგორც ვხედავთ, ეს წარმოებულები არ გარდაიქმნებიან როგორც თვითონ φ_i-ველები, რადგან მათი ვარიაციები შეიცავენ თვით ფაზის (ანუ გარდაქმნის პარამეტრის) წარმოებულსაც. ამიტომ აქაც საჭიროა კოვარიანტული წარმოებულის შემოყვანა ისე როგორც ამას ვაკეთებდით ჩვეულებრივად მრუდე სივრცისათვის (ნაწილი I, თავი II)

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi_i &= \lim_{\Delta x^\mu\to 0}\frac{\varphi_i(x^\mu+\Delta x^\mu)-\varphi_i(x^\mu\to x^\mu+\Delta x^\mu)}{\Delta x^\mu} = \\ &= \lim_{\Delta x^\mu\to 0}\frac{\varphi_i(x^\mu+\Delta x^\mu)-\varphi_i(x^\mu)}{\Delta x^\mu}+\frac{\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_j\Delta x^\mu}{\Delta x^\mu} = \\ &= \partial_\mu\varphi_i+\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_j \end{aligned} \tag{22}$$

სადაც ჩვენ ასევე გამოვიყენეთ განტოლება (19) პარალელური გადატანისათვის.

დ) *<u>ყალიბრული ვექტორული ველი</u>*.

განვიხილოთ ეხლა φ-ველის კოვარიანტული წარმოებულის ვარიაცია

$$\begin{aligned} \delta D_\mu\varphi_i &= \delta\left(\partial_\mu\varphi_i+\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_j\right) = \partial_\mu\delta\varphi_i+\delta\left(\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_j\right) = \\ &= \partial_\mu\left(-\alpha(x)\varepsilon_{ij}\varphi_j\right)+\delta\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_j+\Gamma_{ij\mu}(x)\delta\varphi_j = \\ &= -\alpha(x)\varepsilon_{ij}\partial_\mu\varphi_j-\partial_\mu\alpha(x)\varepsilon_{ij}\varphi_j+\delta\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_j-\alpha(x)\varepsilon_{jk}\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_k(x) = \\ &= -\alpha(x)\varepsilon_{ij}\left(\partial_\mu\varphi_j+\Gamma_{ik\mu}\varphi_k\right)-\partial_\mu\alpha(x)\varepsilon_{ij}\varphi_j+\delta\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_j = \\ &= -\alpha(x)\varepsilon_{ij}D_\mu\varphi_j-\partial_\mu\alpha(x)\varepsilon_{ij}\varphi_j+\delta\Gamma_{ij\mu}(x)\varphi_j \end{aligned} \tag{23}$$

და მოვითხოვოთ რომ ეს წარმოებული გარდაიქმნებოდეს ისე როგორც გარდაიქმნება თვითონ φ-ველი (ის. (20)), ანუ

$$\delta D_\mu \varphi = -\alpha(x)\varepsilon_{ij} D_\mu \varphi_j \tag{24}$$

თუ გავიხსენებთ ახლა რომ $\Gamma_{ij\mu} = a\varepsilon_{ij}A_\mu(x)$ (19) მივდივართ დასკვნამდე რომ ბოლო განტოლების (24) დასაკმაყოფილებლად აფინურ ბმულობაში შემავალი ვექტორული ველი უნდა გარდაიქმნებოდეს როგორც

$$A_\mu(x) \to A_\mu + (1/a)\partial_\mu \alpha(x) \quad . \tag{25}$$

ამ ველს უწოდებენ ყალიბურ ველს და მისი არსებობა, როგორც ვხედავთ გამომდინარეობს კოვარიანტული წარმოებულის არსებობიდან, ანუ ფუდამენტური მოთხოვნიდან, რომ სისტემის ფიზიკური თვისებები, კერძოდ კომპლექსური სკალარული ველის ორიენტაცია ჩვენ შემთხვევაში, გადაცემულ იქნას წერტილიდან წერტილამდე 4-განზომილებიან მინკოვსკის სივრცე-დროში. ამისათვის, როგორც ვხედავთ, უნდა არსებობდეს ვექტორული ყალიბური ველი, რომელიც გარდაიქმნება როგორც (25).

თეორიის ინვარიანტობა ამ გარდაქმნების მიმართ ნიშნავს, მეორეს მხრივ, რომ ეს ვექტორული ველი უნდა იყოს უმასო, რადგან მისი მასური წევრი აუცილებლად დაარღვევდა ამ სიმეტრიას. თუ ეს A-ველი გაიგივებულია ელექტრომაგნიტურ ველთან, მაშინ ჩვენ გვაქვს საქმე ელექტროდინამიკასთან, რომლის თვისებებს უფრო დეტალურად განვიხილავთ მოგვიანებით.

ე) *<u>სიმრუდე და ვექტორული ველის დაძაბულობის ტენზორი</u>*

ეხლა დავთვალოთ გაერთიანებული $M^{(4)} \otimes C^{(1)}$ სივრცის შესაძლო სიმრუდე φ_i-ველების ($i=1,2$) ჩაკეტილი ტრაექტორიის გასწვრივ პარალელური გადატანიდან გამომდინარე. ზოგადად ამ ველების ცვლილება იქნება

$$\Delta\varphi_i = R_{ij\sigma\rho}\varphi_j \delta x^\sigma \delta x^\rho \tag{26}$$

სადაც $R_{ij\sigma\rho}$ შესაბამისი რიმანის სიმრუდის ტენზორია, რომელიც (ჩვეულებრივად როგორც მრუდე სივრცე-დროში, იხ. ამოცანა 9) გამოისახება აფინური ბმულობების საშუალებით

$$R_{ij\sigma\rho} = \partial_\sigma \Gamma_{ij\rho} - \partial_\rho \Gamma_{ij\sigma} + \Gamma_{ik\sigma}\Gamma_{kj\rho} - \Gamma_{ik\rho}\Gamma_{kj\sigma} \quad . \tag{27}$$

რადგანაც $\Gamma_{ij\mu} = a\varepsilon_{ij}A^{\mu}$, მისი ანტისიმეტრიულობის (i- და j- მიმართ) გამო განტოლებაში (27) შემავალი ბოლო ორი წევრი ერთმანეთს აბათილებს და, საბოლოოდ, ბმულობების ცხადი სახით ჩასმა გვაძლევს:

$$R_{ij\sigma\rho} = a\varepsilon_{ij}\left(\partial_{\sigma}A_{\rho}(x) - \partial_{\rho}A_{\sigma}(x)\right) = a\varepsilon_{ij}F_{\sigma\rho} \qquad (28)$$

სადაც $F_{\sigma\rho} = \partial_{\sigma}A_{\rho} - \partial_{\rho}A_{\sigma}$ ვექტორული ველის დაძაბულობის ცნობილი ტენზორია. ადვილი დასანახია, რომ ეს ტენზორი $F_{\mu\nu}$ ავტომატურად ინვარიანტულია ვექტორული ველის A_{μ} ყალიბური გარდაქნების (25) მიმართ. შემდგომ A_{μ} ველს ერთმნიშვნელოვნად გავაიგივებთ ელექტრომაგნიტურ ველთან

ვ) *<u>U(1) ყალიბური ინვარიანტობის ჯგუფი</u>*.

როგორც დავრწმუნდით, კომპლექსური სკალარული ველი და ელექტრომაგნიტური ველი A_{μ} ერთდროულად გარდაიქმნება როგორც

$$\varphi \to \varphi e^{i\alpha(x)} \quad , \qquad A_{\mu}(x) \to A_{\mu} + (1/a)\partial_{\mu}\alpha(x) \qquad (29)$$

ეს გარდაქმნები ქმნიან სიმეტრიის ჯგუფს, რომელსაც უნიტარული 1-განზომილებიანი *U(1)* ჯგუფი ეწოდება. ეს ჯგუფი ამ შემთხვევაში, როგორც ამბობენ, ლოკალურია რადგან გარდაქმნების ფაზა $\alpha(x)$ იცვლება წერტილიდან წერტილამდე.

კომპლექსური სკალარული φ-ველისათვის ეს, როგორც უკვე ავღნიშნეთ, უბრალოდ კომპლექსურ სიბრტყეში $(\mathrm{Re}\,\varphi, \mathrm{Im}\,\varphi) = (\varphi_1, \varphi_2)$ ბრუნვაა, ხოლო ვექტორული A_{μ} ველისათვის ეს ჯგუფი არის არაერთგვაროვანი წანაცვლება $\partial_{\mu}\alpha(x)$ წევრით. ეს ორივე ტიპის გარდაქმნა აკმაყოფილებს ჯგუფის თვისებებს:

(**i**) არსებობს ერთეულოვანი ელემენტი, რომელიც შეესაბამება $\alpha = 0$.

(**j**) არსებობს შებრუნებული ელემენტი, რომელიც შეესაბამება შეცვლას $\alpha \to -\alpha$.

(**k**) მუშაობს კომპოზიციის კანონი: ორი ნებისმიერი თანმინდევრებული $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფაზით განხორციელებული გარდაქმნებისთვის

$$\varphi' \to \varphi e^{i\alpha(x)} \qquad A'_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha$$
$$\varphi'' \to \varphi'\, e^{i\beta(x)} \qquad A''_{\mu} = A'_{\mu} + \partial_{\mu}\beta$$

არსებობს ჯამური გარდაქმნა

$$\varphi'' \to \varphi e^{i(\alpha+\beta)} \qquad A''_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}(\alpha + \beta)$$

რომელიც ეკუთვნის იმავე *U(1)* ჯგუფის ელემენტების (ანუ გარდაქმნების) მრავალნაირობას.

საბოლოოდ ავღნიშნოთ, რომ როცა *U(1)* ჯგუფი გლობალურია, როგორც ეს გვქონდა წინა განხილვაში (იხ. 3-გ), გარდაიქმნება მხოლოდ φ-ველი. ვექტორული A_μ ველი კი ამ შემთხვევაში საერთოდ არ არსებობს, რადგან მისი საჭიროება არსაიდან არ გამომდინარობს - კომპლექსური φ-ველის ფაზა სივრცე-დროში ყველგან ერთი და იგივეა. მეორეს მხრივ, თუ *U(1)* ჯგუფი ლოკალურია მაშინ ვექტორული (ანუ ელექტრომაგნიტური) ველი A_μ უნდა არსებობდეს რომ უზრუნველყოს φ-ველის ლოკალური $\alpha(x)$ ფაზის გადატანა მინკოვსკის სივრცის ერთი წერტილიდან მეორე წერტილში.

5. კლასიკური ელექტროდინამიკა.

ა) *ლაგრანჟიანი.*

კომპლექსური სკალარული φ-ველის ლაგრანჟიანი ზოგად შემთხვევაში, როცა მისი ორიენტაცია შინაგან სივრცეში არ არის მუდმივი და იცვლება წერტილიდან წერტილამდე (მინკოსკის სივრცე-დროში), აღარ გამოისახება უბრალო ფორმულით (4). მართლაც ფაქტობრივად ამ ფორმულაში φ-ველის წარმოებული უნდა შეიცვალოს კოვარიანტული წარმოებულით (22)

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow D_\mu \varphi \qquad (22')$$

იმისათვის რომ ის იყოს ჭეშმარიტი ვექტორი შინაგანი სივრცის გათვალისწინებითაც. თვალსაჩინოა რომ ეს წმინდა გეომეტრიული მოთხოვნა სრულებით განსაზღვრავს ამ ველის ელექტრომაგნიტურ ურთიერთქმედებას (იხ. ქვემოთ (32)) რადგან კოვარიანტულ წარმოებულში შემავალი აფინური ბმულობა $\Gamma_{i\,j\,\mu}(x) = a\varepsilon_{i\,j} A_\mu(x)$ შეიცავს ელექტრომაგნიტურ A_μ ველს. ამასთან, თუ ჩვენ განვიხილავთ A_μ როგორც ფიზიკურ ველს მაშინ სრულ ლაგრანჟიანში, φ და A_μ ველების ურთიერთქმედების გარდა, უნდა შედიოდეს ამ ველის კინეტიკური წევრიც. ეს წევრი შეიძლება დავადგინოთ თანახმად სიმრუდის გამოსახულებისა (28) გამომდინარე φ_i-ველების (i=1,2) პარალელური გადატანიდან ჩაკეტილი ტრაექტორიის გასწვრივ. ამ გამოსახულებიდან მიღებული უმარტივესი ლორენც-ინვარიანტული სტრუქტურა არის $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ როგორც პირდაპირ შეგვიძლია დავინახოთ. აქედან შესაბამისი კოეფიციენტების შერჩევით - ისე რომ ვარიაციის შედეგად გამოდიოდეს კორექტული მოძრაობის განტოლებები φ და A_μ ველებისათვის - უშუალოდ ვღებულობთ ლაგრანჟიანს

$$\zeta = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \varphi_i D^\mu \varphi_i - \frac{m^2}{2} \varphi_i \varphi_i \qquad (30)$$

რომელიც არის ლორენც-ინვარიანტული, რეალური, მინიმალური და აკმაყოფილებს ყველა დანარჩენ საჭირო პირობას (1)-(6) (იხ. 2.ბ). ამას გარდა ეს

ლაგრანჟიანი ყალიბურად ინვარიანტულია, ე.ი. ითვალისწინებს ასევე შინაგანი სივრცის ლოკალური თვისებების მოთხოვნებს. ეს ყალიბური ინვარიანტობა ნიშნავს, მეორეს მხრივ, რომ ელექტრომაგნიტური ველი უმასოა, რადგანაც მისი მასური წევრი $(1/2)M^2 A_\mu A^\mu$ აუცილებლად დაარღვევდა ამ სიმეტრიას (25).

რა თქმა უნდა ლაგრანჟიანი (30) ასევე ინვარიანტულია 4-ტრანსლიაციების მიმართაც, რაც სკალარული ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორთან (13) ერთად გვაძლევს ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის შენახვად ტენზორს

$$T^{\{\mu\nu\}}(A) = -\, F^{\mu\rho}F_{\rho}^{\ \nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \tag{31}$$

სადაც ჩვენ მოვიყვანეთ ამ ტენზორის სიმეტრიზებული ვერსია.

თუ გადავწერთ ეხლა ლაგრანჟიანს (30) კარტანის ბაზისში (φ და φ^* კომპონენტებში) მივიღებთ

$$\begin{aligned}\zeta &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\varphi^* D^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left(\partial_\mu\varphi^* + ieA_\mu\varphi^*\right)\left(\partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi\right) - m^2\varphi^*\varphi = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + A_\mu\left[ie\left(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^*\varphi\right) + e^2 A_\mu\varphi^*\varphi\right] - m^2\varphi^*\varphi\end{aligned} \tag{30'}$$

ამ გამოსახულების ბოლო სტრიქონიდან ნათლად ჩანს რომ, გარდა A_μ და φ ველების კინეტიკური წევრებისა და φ ველის მასური წევრისა, ლაგრანჟიანში წარმოდგენილია ელექტრომაგნიტური ველის სკალარული ველის დენთან ურთიერთქმედების წევრი

$$A^\mu\, j_\mu^{em} \quad , \quad j_\mu^{em} = ie\left(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^*\varphi\right) + e^2 A_\mu\varphi^*\varphi \quad . \tag{32}$$

ამ ურთიერთქმედების კონსტანტა, ანუ ელექტრული მუხტი e, არის ზუსტად ის კონსტანტა a, რომელიც იყო ადრე წარმოდგენილი აფინური ბმულობის ტენზორში $\Gamma_{i\,j\,\mu}(x) = a\varepsilon_{i\,j}A_\mu(x)$ (იხ. (19').

ამრიგად კომპლექსური სკალარული φ ველი ფაქტობრივად აღწერს ელექტრულად დამუხტულ სკალარულ ველს და მისი ლაგრანჟიანი (19) წარმოადგენს სკალარული ველის სტანდარტულ ელექტროდინამიკას.

ბ) *<u>მოძრაობის განტოლებები</u>*.

ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები A_μ და φ ველებისათვის მიიღება ჩვეულებრივი ვარიაციის წესით (იხ. ნაწილი 2.). ამრიგად ელექტრომაგნიტური A_μ ველისათვის გვაქვს

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\mu\nu} = j_\mu^{em} \tag{33}$$

სადაც j_μ^{em} მოცემულია ზემოთ (32), **ხ**ოლო სკალარული φ ველისათვის შესაბმისი ვარიაციის შედეგად გამოდის

$$\left(\Box - m^2\right)\varphi = J^\varphi \tag{34}$$

სადაც J^φ სკალარული ველის დენია (ან, როგორც ამბობენ, წყაროა). ამ დენის სა**ხ**ის დადგენასთან დაკავშირებით იხ. ამოცანა 10.

გ. *<u>მაქსველის განტოლებები (სწრაფი მიმო**ხ**ილვა)</u>*.

(i) ვექტორ-პოტენციალი და ელექტრული და მაგნიტური ველები. $F_{\mu\nu}$ ტენზორის განმარტების გამოყენებით $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu$ შეიძლება ადვილად განვსაზღვროთ $F_{\mu\nu}$-ს თითოეული კომპონენტი. გამომდინარე პირდაპირი კავშირებიდან ვექტორ-პოტენციალსა A_μ და ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს შორის

$$A_\mu = \left(\varphi, -\vec{A}\right), \quad \vec{E} = -grad\varphi \ , \ \vec{B} = rot\vec{A}$$

ვღებულობთ

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

ან უფრო მოკლე სახით:

$$E^i = -F^{0i} \qquad B^i = -\varepsilon^{ijk} F_{jk} \tag{35'}$$

(j) **მაქსველის განტოლებების პირველი წყვილი**. რადგანაც $F_{\mu\nu}$ ანტისიმეტრიული ტენზორია მისთვის სამართლიანია შემდეგი იგივეობა

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F^{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F^{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \tag{36}$$

აქედან ადვილად მიიღება მაქსველის განტოლებების პირველი წყვილი

$$div\, \vec{B} = 0 \tag{37}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{38}$$

ეს განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს ინტეგრალური ფორმით. კერძოდ, გაუსის თეორემის თანახმად პირველი განტოლება (37) გადადის

$$\int div\, \vec{B} dV = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \tag{37'}$$

სადაც მარჯვენა ინტეგრალი აიღება მარცხენა ინტეგრალის მოცულობის შემომსაზღვრელ მთელ ჩაკეტილ ზედაპირზე. ინტეგრალს ვექტორიდან რაიმე ზედაპირზე ეწოდება *ვექტორის ნაკადი* ამ ზედაპირში. ესე იგი ამ განტოლების თანახმად *მაგნიტური ველის ნაკადი ნებისმიერ ჩაკეტილ ზედაპირზე ნულის ტოლია.*

რაც ეხება მეორე განტოლებას (38) სტოქსის თეორემის თანახმად ის შეიძლება გადაწერილ იქნას როგორც

$$\int rot\,\vec{E}\,d\vec{S} = \oint \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{H}\,d\vec{S} \qquad (38')$$

სადაც მარჯვენა ინტეგრალი აიღება შეკრული კონტურის გასწვრივ, რომელიც შემოსაზღვრავს იმ ზედაპირს, რომელზედაც აინტეგრებენ მარცხენა ინტეგრალს. ინტეგრალს ვექტორიდან ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ ეწოდება ამ *ვექტორის ცირკულაცია* კონტურის გასწვრივ. ესე იგი ამ განტოლების თანახმად *ელექტრული ვექტორის ცირკულაცია რაიმე კონტურში ტოლია ამ კონტურით შემოსაზღვრულ ზედაპირში მაგნიტური ველის ნაკადის ცვლილებისა (მისი დროით წარმოებულისა შებრუნებული ნიშნით).*

(k) **მაქსველის განტოლებების მეორე წყვილი**. ელექტრომაგნიტური ველის მოძრაობის განტოლებიდან (33) შეიძლება მივიღოთ მაქსველის განტოლებების მეორე წყვილი

$$div\vec{E} = \rho \qquad (39)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{em} \qquad (40)$$

სადაც ზოგადად $j^{\mu}_{em} = \left(\rho, \vec{j}_{em}\right)$ თუმცა, როგორც ვიცით, ამ დენს დამუხტული სკალარული ველის კერძო შემთხვევისათვის აქვს სახე (32).

გადავწეროთ ეხლა ეს განტოლებები ინტეგრალური სახით. პირველი განტოლება (39) კვლავ გაუსის თეორემის გამოყენებით გადადის

$$\int div\,\vec{E}\,dV = \oint \vec{E}\,d\vec{S} = \int \rho\,dV \qquad (39')$$

რაც ნიშნავს რომ *ელექტრული ველის ნაკადი ჩაკეტილ ზედაპირში პროპორციულია ამ ზედაპირით შემოსაზღვრულ მოცულობაში არსებული სრული მუხტისა.*

ანალოგიურად მეორე განტოლება (40) სტოქსის თეორემის გამოყენებით გვაძლევს

$$\int rot\,\vec{B}\,d\vec{S} = \oint \vec{B}\,d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}\,d\vec{S} + \int \vec{j}\,d\vec{S} = \int \left(\vec{j} + \partial\vec{E}/\partial t\right)d\vec{S} \qquad (40')$$

ანუ, მაგნიტური ველის ცირკულაცია რაიმე კონტურის გასწვრივ პროპორციულია ამ კონტურით შემოსაზღვრულ ზედაპირში გამავალი დენების ჯამისა – ნამდვილი დენისა $\vec{j}$ და ე.წ. წანაცვლების დენისა $\partial\vec{E}/\partial t$.

(l) **ერთეულების სისტემა.** ჩვენ აქ ყველგან ვიყენებთ ე.წ. ჰევისაიდის ერთეულთა სისტემას, რადგან ველების განტოლებებს ამ სისტემაში აქვთ უფრო მარტივი სახე. სამაგიეროთ კულონის პოტენციალში (**იხ**. **II**-46) (და ასევე ნიუტონის გრავიტაციულ პოტენციალშიც (**იხ**. **II**-61)) ჩნდება დამატებითი მამრავლი $1/4\pi$. ამის საპირისპიროთ - სტანდარტულ გაუსის ერთეულთა სისტემაში დამატებითი მამრავლი $1/4\pi$ აქვს ელექტრომაგნიტური ველის კინეტიკურ წევრს $-1/4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (და ასევე გრავიტაციული ველის კინეტიკურ წევრს, **იხ**. ნაწილი **III**), **ხ**ოლო კულონის (და ნიუტონის) პოტენციალი თავისუფალია მისგან.

ამოცანები.

1. (**i**) აჩვენეთ, რომ დენის შენახვიდან $\partial_\mu j^\mu = 0$ გამომდინარეობს სრული მუხტის დროისგან დამოუკიდებლობა $\frac{dQ}{dt} = 0$, სადაც Q განმარტებულია როგორც $Q = \int d^3 x j^0(x)$.
   (**ii**) აჩვენეთ, რომ ენერგია-იმპულსის ტენზორის შენახვიდან $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ სრული 4-იმპულსის დროისგან დამოუკიდებლობა $\frac{dP^\nu}{dt} = 0$, სადაც P^ν განმარტებულია როგორც $P^\nu = \int d^3 x T^{0\nu}(x)$.

2. აჩვენეთ, რომ ელექტრომაგნიტური დაძაბულობის ტენზორი $F_{\mu\nu}$ აკმაყოფილებს $\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$ განტოლებას.

3. აჩვენეთ, რომ $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$ და $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} = \vec{E}\vec{H}$

4. გამოიყვანეთ მაქსველის განტოლებების პირველი და მეორე წყვილი და დაადგინეთ მათი ფიზიკური შინაარსი.

5. განსაზღვრეთ A_μ-სთან შეუღლებული განზოგადებული იმპულსი $\Pi^\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)}$. აჩვენეთ, რომ $\Pi^i = E^i$ (ელექტრული ველი) $\Pi^0 = 0$.

6. 3 და 5 ამოცანების შედეგების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ ლექტრომაგნიტური ველის ენერგიის სიმკვრივე განსაზღვრული როგორც $\varepsilon = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \zeta$ ტოლია $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$.

7. აჩვენეთ, რომ 6 ამოცანაში გამოყენებული ენერგიის სიმკვრივე ε არის A_μ

ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორის T^{00} კომპონენტი. აჩვენეთ, რომ მისი ზოგადი სახეა

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \zeta_A}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\partial_\nu A_\sigma - \delta^{\mu\nu}\zeta_A \quad , \text{ სადაც } \quad \zeta_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

8. დაამტკიცეთ განტოლება

$$R_{ij\sigma\rho} = \partial_\sigma \Gamma_{ij\rho} - \partial_\rho \Gamma_{ij\sigma} + \Gamma_{ik\sigma}\Gamma_{kj\rho} - \Gamma_{ik\rho}\Gamma_{kj\sigma}$$

9. ლაგრანჟიანიდან (30’) იპოვეთ სკალარული ველის დენი J^φ.

10. ამოხსენით სკალარული ველის მოძრაობის განტოლება $(\Box - m^2)\varphi = J^\varphi$ (იხ. (34)). ჩათვალეთ რომ წყაროს სიმკვრივე მუდმივია.

11. დაამტკიცეთ განტოლება (13’) ლაგრანჟიანის ვარირებით ლორენც-გარდაქმნების მიმართ. <u>მითითება:</u> გამოიყენეთ ლორენც გარდაქმნების ინფინიტიზემალური ფორმა $x^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu}x_\nu$, $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. დაამტიცეთ ამ ფორმის მართებულობა.

III. გრავიტაცია

I. გრავიტაციული ურთიერთქმედება – ევრისტული მიახლოვება

ავღნიშნოთ უპირველეს ყოვლისა, რომ თუ სხვა ცნობილი ურთიერთქმედები (როგორიცაა ელექტრომაგნიტური, სუსტი და ძლიერი (ბირთვული) ურთიერთქმედება) მოქმედებენ უკვე აპრიორულად გაანსაზღვრულ სივრცე-დროში გრავიტაციული ძალები ზოგადათ თვითონ განაპირობებენ ამ სივრცე-დროის ფუნდამენტურ თვისებებს. ჩვენ ვფიქრობთ, რომ ამ თვისებების დადგენა ხდება ზემცირე მანძილებზე, სადაც იჩენს თავს *კვანტური გრავიტაცია*. დიდ მანძილებზე კი გრავიტაციული ძალები მოქმედებენ, როგორც ჩანს, ანალოგიურად სხვა ძალებისა თითქმის ბრტყელ 4-განზომილებიან სივრცე-დროში. ესაა ე.წ. *სუსტი გრავიტაციის მიახლოვება*, რომელშიც აშკარად ჩანს ანალოგია ელექტროდინამიკასთან. ტრადიციულად გრავიტაციული ურთიერთქმედების ძირითადი განტოლებების დასადგენად იყენებენ ამ ანალოგიას. ჩვენც დავიწყებთ ამ უფრო ინტუიციური მიდგომით, რომელიც ჩვენ უკვე ნაწილობრივ გამოვიყენეთ ზემოთ (იხ. II-II-5)[4] და შემდეგ თავში განვიხილავთ ამ თეორიის ფორმალურ მხარეებსაც.

[4] ლექციებში წინა მასალააზე რეფერენციები აღინიშნება მზგავსი წესით, მაგ. I-II-5 ნიშნავს რეფერენციას პუნქტზე 5 ნაწილი I, თავი II, ხოლო I-II-(15) ნიშნავს რეფერენციას ფორმულაზე (15) ამავე ნაწილში და თავში.

1. ანალოგია ელექტროდინამიკასთან.

მართლაც, კარგად ცნობილია რომ არსებობს პირდაპირი ანალოგია სტატიკურ გრავიტაციულ და სტატიკურ ელექტრულ ველებს შორის. ამ შემთხვევაში ელექტრომაგნიტური ვექტორ-პოტენციალი A_μ არის დროში მუდმივი, ანუ $\frac{\partial}{\partial t} A_\mu = 0$. მაშინ მაქსველის განტოლებიდან (იხ. III-5გ)

$$div\vec{E} = \rho \qquad (1)$$

სადაც

$$\vec{E} = -grad\,\varphi \qquad (\varphi = A^0\,,\, -E^i = F^{0i} = \frac{\partial}{\partial t} A^i - \frac{\partial}{\partial x^i} A^0)$$

ვღებულობთ

$$\Delta\varphi \equiv \partial^i \partial_i \varphi = -\rho\,. \qquad (2)$$

ეს კარგად ნაცნობი პუასონის განტოლებაა, რომლის ამონახსნი სტატიკური ელექტრული მუხტის სიმკვრივისათვის, რომელიც ლოკალიზებულია კოორდინატთა სისტემის სათავეში $\rho = Q\delta(\vec{r})$ გვაძლევს ცნობილ კულონის პოტენციალს

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi R} \qquad .$$

(იმის გამო რომ ჩვენ კლასიკური ელექტროდინამიკის აღწერისას (იხ. **II-III**) ვიყენებთ ჰევისაიდის ერთეულთა სისტემას კულონის პოტენციალში ჩნდება დამატებითი მამრავლი $1/4\pi$).

მეორეს მხრივ, როგორც კარგად ცნობილია სტატიკურ გრავიტაციულ პოტენციალს აქვს ანალოგიური სახე

$$V(R) = -\frac{GM}{4\pi R}$$

სადაც G ნიუტონის მუდმივაა $(G = 10^{-38} Gev^{-2}$ $(\hbar = c = 1)$, ხოლო M გრავიტირებადი სხეულის მასა.

2. გრავიტაციული ველის განტოლებები.

ზემოთ განხილული ანალოგიის საფუძველზე ანალოგიური პუასონის განტოლება გრავიტაციისათვის უნდა იყოს

$$\Delta V \equiv G\rho \quad , \qquad \rho = M\delta^3(R) \quad . \tag{2'}$$

სადაც $V(R)$ სტატიკური მასის სიმკვრივის $\rho(R)$-ის მიერ შექმნილი პოტენციალი

გავიხსენოთ რომ სტატიკური არა-რელატივისტური ნივთიერებისთვის $\rho \cong T^{00}$, სადაც ენერგია-იმპულსის ტენზორის "00" კომპონენტი

$$T^{00} = \int d\tau M \frac{dt(\tau)}{d\tau} \frac{dt(\tau)}{d\tau} \delta^4\left(x - x(\tau)\right)\left[-g(x)\right]^{-1/2} \tag{3}$$

(იხ. **II-II-**(34) გადაწერილი მრუდე სივრცისათვის $\delta^4(x) \to (-g)^{-1/2}\delta^4(x)$) ერთი (დაახლოვებით) "უძრავი" M-მასის მქონე ნაწილაკისათვის პირდაპირ გვაძლევს სუსტი გრავიტაციის მიახლოვებაში (**II-II-5**)

$$T^{00} \cong M\delta^3\left(x - x(\tau)\right) \quad . \tag{4}$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ ამ ნაწილაკის მიერ შექმნილი პოტენციალი V არის $V = \frac{1}{2}h_{00}$, როგორც ეს გამოდის ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებიდან მრუდ სივრცეში (ანუ გეოდეზიურის განტოლებიდან აგებულს საჭირო მიახლოვებაშო, იხ. **II-II-5ბ**)) მივიღებთ

$$\Delta h_{00} = 2GT_{00}$$

ეს ტოლობა, რა თქმა უნდა სამართლიანია მხოლოდ სუსტი გრავიტაციული ველის შემთხვევაში, მაგრამ ჩვენ მივიღებთ რომ ის "მუშაობს" ნებისმიერი

გრავიტაციული ველის შემთხვევაშიც, ანუ $\Delta g_{00} = 2GT_{00}$. ამაზე მეტიც ჩვენ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ ამ განტოლების კოვარიანტული ანალოგიც არსებობს, რომელსაც აქვს სახე

$$G_{\mu\nu} = 2GT_{\mu\nu} \tag{5}$$

სადაც $G_{\mu\nu}$- ზოგადი 2-ინდექსიანი ტენზორია, რომელიც მეტრიკული ტენზორის $g_{\mu\nu}$ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებზეა დამოკიდებული, ხოლო $T_{\mu\nu}$- გრავიტაციული ველისა და სხვა არსებული ველების სრული ენერგია-იმპულსის ტენზორი. განმარტებისამებრ $G_{\mu\nu}$ ტენზორი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ მოთხოვნებს:

(1) რადგანაც ტენზორი $T_{\mu\nu}$ სიმეტრიულია $G_{\mu\nu}$ ტენზორიც უნდა იყოს სიმეტრიული, ანუ $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$,

(2) სტატიკურ ზღვარზე გადასვლისას იგი უნდა გვაძლევდეს $G_{00} \cong \Delta g_{00}$,

(3) კოვარიანტული გაწარმოებისას იგი უნდა ინახებოდეს, ისევე როგორც ინახება $T_{\mu\nu}$ ტენზორი, ანუ $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$,

(4) სტრუქტურულად ის უნდა იყოს მინიმალური, ანუ არ უნდა შეიცავდეს რაიმე ტენზორების მაღალი რიგის ნამრავლებს.

ახლა ვაჩვენოთ რომ ყველა ეს მოთხოვნა ავტომატურად იქნება დაკმაყოფილებული თუ $G_{\mu\nu}$-ს ავიღებთ ე.წ. აინშტაინის ტენზორის სახით:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} \tag{6}$$

მართლაც პირველი და მეოთხე მოთხოვნები ტრივიალურად სრულდება აღებულ ფორმაში (6). მეორე მოთხოვნაც ადვილად შესამოწმებელია

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R\, g_{00} \;\cong\; \Delta g_{00} \quad .$$

რაც ეხება მესამე მოთხოვნას $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$ დავწეროთ მის დასამტკიცებლად ბიანკის იგივეობა რიმანის სიმრუდის ტენზორისათვის (იხ. **I-II-4-7**)

$$R^{\alpha}_{\beta\sigma\rho;\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\sigma;\rho} + R^{\alpha}_{\beta\rho\gamma;\sigma} = 0 \tag{7}$$

(სადაც $;\gamma$ ნიშნავს კოვარიანტულ წარმოებულს ∇_γ). გავამრავლოთ ტოლობა (7) $g^{\beta\sigma}\delta^\rho_\alpha$-ზე და გამოვიყენოთ ის , რომ $\nabla_\mu g_{\sigma\rho}=0$, მაშინ

$$-R_{;\gamma}+g^{\beta\sigma}R^\alpha_{\beta\gamma\sigma;\alpha}+g^{\beta\sigma}R^\alpha_{\beta\alpha\gamma;\sigma}=0 \quad\Rightarrow\quad -R_{;\gamma}+R^\alpha_{\gamma;\alpha}+R^\sigma_{\gamma;\sigma}=0 \tag{7'}$$

$$\Rightarrow\quad R^\alpha_{\gamma;\alpha}-\frac{1}{2}R_{;\gamma}=0 \quad .$$

გავამრავლოთ ეხლა ბოლო გამოსახულება $g^{\beta\gamma}$-ზე

$$g^{\beta\gamma}\left[R^\alpha_{\gamma;\alpha}-\frac{1}{2}R_{;\gamma}\right]=0 \;\Rightarrow\; R^{\alpha\beta}_{;\alpha}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R_{;\alpha}=0 \;\Rightarrow\; \nabla^\mu G_{\mu\nu}=0$$

ამრიგად, ყველა მოთხოვნა დაკმაყოფილებულია და აინშტაინის განტოლებას აქვს სახე:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu}=2GT_{\mu\nu} \quad . \tag{8}$$

ავღნიშნოთ რომ აღებული ფორმა (6) აინშტაინის ტენზორისათვის უნიკალურია. ერთადერთი წევრი, რომელიც შეიძლება დაემატოს მას არის $\Lambda g_{\mu\nu}$ ტიპის სტრუქტურა (სადაც Λ კონსტანტაა), რომელსაც *კოსმოლოგიურ წევრს* უწოდებენ და მას, როგორც ჩანს შესაბამისი ჰამილტონიანიდან, ვაკუუმის ენერგიის აზრი აქვს. თანახმად ექსპერიმენტული მონაცემებისა იგი ძალიან მცირეა,

$$\frac{\Lambda}{2G}\le 10^{-29}g/cm^3 \quad .$$

მასთან ერთად აინშტაინის განტოლებები ღებულობენ საბოლოო სახეს:

$$R_{\mu\nu}-\left(\frac{1}{2}R-\Lambda\right)g_{\mu\nu}=2GT_{\mu\nu} \tag{9}$$

სადაც $T_{\mu\nu}$ გრავიტაციული ველის წყაროა (მსგავსად ელექტრომაგნიტური დენისა ელექტრომაგნიტურ ველთან მიმართებაში).

3. აინშტაინის განტოლებების ფიზიკური შინაარსი.

გრავიტაციული და ინერციალური მასების ექვივალენტობა ნიშნავს, რომ შეუძლებელია გრავიტაციული და ინერციალური ძალების გარჩევა. რადგანაც თავისუფლადვარდნილ სისტემაში შეუძლებებლია ინერციალური აჩქარების დაკვირვება, ამიტომ გრავიტაციული აჩქარების დაკვირვებაც შეუძლებელია.

მიუხედავათ იმისა, რომ ეს დაკვირვება შეუძლებელია მხოლოდ სტატიკურ ერთგვაროვან გრავიტაციულ ველში, ჩვენ გვჯერა ძლიერი ექვივალენტობის პრინციპისა, რომლის ტანახმად სივრცე-დროის ნებისმიერ (მაგრამ არა ყოველ) წერტილში ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი ლოკალური ინერციალური სისტემა, რომ ნებისმიერი გრავიტაციული ურთიერთქმედება გამოირიცხოს და ყველა დინამიკური განტოლება გამოიყურებოდეს ისევე როგორც მინკოვსკის სივრცეში ($g_{\mu\nu}(P)=\eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(P)=0$) . ნებისმიერი გრავიტაციული ურთიერთქმედება ნიშნავს ნებისმიერ მეტრიკულ ტენზორს $g_{\mu\nu}(x)$ და ნებისმიერ აფინურ ბმულობას $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)$, რომელიც ჩნდება ნებისმიერი ზოგად კოორდინატული გარდაქმნით $x\to x'$, მაშინ როცა დინამიკური განტოლებები თავისთავად ინარჩუნებს თავის ფორმას. ეს არის ზოგადი კოვარიანტობის პრინციპი და იგი პირდაპირ გამომდინარეობს ექვივალენტობის პრინციპიდან.

აინშტაინის განტოლებათა სისტემა შეიცავს 10 განტოლებას $g_{\mu\nu}(x)$ მეტრიკული ტენზორის 10 კომპონენტისათვის. ამიტომ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ მათი ამოხსნით ვიპოვით $g_{\mu\nu}(x)$ ტენზორის 10-ივე კომპონენტს. მაგრამ ეს ასე არ არის: 10 განტოლებიდან $G_{\mu\nu}=2GT_{\mu\nu}$ დამოუკიდებელია მხოლოდ 6 განტოლება, რადგან 4 ბიანკის იგივეობა $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu}=0$ ამცირებს მათ რაოდენობას ზუსტად 6-ამდე. აქაც ვხედავთ ანალოგიას ელექტროდინამიკასთან – კოვარიანტული მაქსველის განტოლებები $\partial^{\mu}F_{\mu\nu}=j_{\nu}$ შეიცავენ 4 განტოლებას მაგრამ იქაც ბიანკის ტიპის იგივეობა $\partial^{\mu}\partial^{\nu}F_{\mu\nu}=0$ ამცირებს მათ რაოდენობას 3-ამდე. ძალიან მნიშვნელოვანია რომ ისევე როგორც ეს იგევეობა ჩნდება ელექტრომაგნიტური დაძაბულობის $(F_{\mu\nu})$ ყალიბრულად ინვარიანტული ფორმიდან, გრავიტაციაში ბიანკის იგივეობები დაკავშირებულია აინშტაინის ტენზორის $(G_{\mu\nu})$ ზოგად კოვარიანტულ ფორმასთან. ანუ ორივე შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს საქმე

ყალიბურ ინვარიანტობასთან რაც ნიშნავს, რომ ვექტორული პოტენციალის $A_\mu(x)$ ერთი კომპონენტი, ხოლო $g_{\mu\nu}(x)$ მეტრიკული ტენზორის 4 კომპონენტი არ შეიძლება განისაზღვროს ცალსახად. ეს ასახავს იმ ფაქტს, რომ თუ $g_{\mu\nu}(x)$ არის აინშტაინის განტოლების ამონახსნი, მაშინ $g'_{\mu\nu}(x)$, რომელიც დაკავშირებულია ზოგად კოორდინატული გარდაქმნების შედეგთან

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha \qquad g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g_{\alpha\beta} \tag{10}$$

აგრეთვე მისი ამონახსნია მართლაც, კოორდინატულ გარდაქმნებს შემოყავთ 4 ნებისმიერი ფუნქცია $x'^\mu(x)$, რომლებსაც შემოაქვთ $g'_{\mu\nu}(x)$-ში 4 ნებისმიერი კომპონენტი ისევე როგორც ვექტორ-პოტენციალის ყალიბრული გარდაქმნა $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varphi$ ტოვებს ერთ-ერთ მის კომპონენტს ნებისმიერს.

ამრიგად, აინშტაინის განტოლებების სრული ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა 4 ახალი განტოლება. ამ დამატებითი განტოლებებს (რომლებიც შეიძლება შერჩეულ იქნან სხვადასხვა გზით, იხ. ქვემოთ) უწოდებენ გრავიტაციის ყალიბურ პირობას, ისევე როგორც ელექტროდინამიკაში ერთერთ ასეთ არჩევანს - $\partial_\mu A^\mu = 0$ - უწოდებენ *ლორენცის ყალიბრებას.*

4. გრავიტაციული ტალღები.

ახლა დავწრმუნდეთ, რომ თავისუფალ ელექტრომაგნიტურ ტალღებთან ერთად რომლებიც აღიწერება დალამბერის განტოლებით

$$\Box A_\mu = 0 \ , \ A_\mu(x) = \int e^{ikx}\delta(k^2)a_\mu(k)d^4k \tag{11}$$

გვაქვს გრავიტაციული ტალღებიც. ზოგადათ, ელექტრომაგნიტურ ტალღებს დავიმზერთ მინკოვსკის სივრცე-დროში. ამრიგად, გრავიტაციული ტალღების დასამზერადაც უნდა ჩავთვალოთ გრავიტაციული ველი საკმაოდ სუსტად - ისე, რომ გვქონდეს თითქმის ბრტყელი მინკოვსკის სივრცე $g_{\mu\nu}(x)=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ $\left(h_{\mu\nu}<<1\right)$ და ამ სივრცეში ვეძებოთ მცირე $h_{\mu\nu}$ ტალღების გავრცელება. შესაბამისად კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორისათვის გვექნება $g^{\mu\nu}(x)=\eta^{\mu\nu}-h^{\mu\nu}$ $\left(h^{\mu\nu}<<1\right)$.

ინფინიტიზემალურ ზოგად კოორდინატულ გარდაქმნებს აქვთ ლოკალური ტრანსლაციების $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ $\left(\varepsilon^\mu << x^\mu\right)$ სახე. შესაბამისად მეტრიკული ტენზორი გარდაიქმნება როგორც

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \tag{12}$$

ანუ თუ გამოვიყენებთ, რომ

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = \left(\delta^\alpha_\mu - \frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\left(\delta^\beta_\nu - \frac{\partial\varepsilon^\beta}{\partial x'^\nu}\right) \tag{13}$$

და

$$\frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x'^\mu} \cong \frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \quad , \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad , \quad g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x) \tag{13'}$$

$h_{\mu\nu}$ ტენზორის გარდაქმნისათვის მივიღებთ

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} \tag{14}$$

ამრიგად ყალიბური თავისუფლება ამ ტენზორში მოცემულია ნებისმიერი 4-კომპონენტიანი ვექტორული პარამეტრით $\varepsilon_\mu(x)$. ავირჩიოთ ეს კომპონენტები ისე რომ დაკმაყოფილდეს 4-კომპონენტიანი პირობა

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu h\right] = 0 \qquad (\nu = 0,1,2,3) \tag{15}$$

რომელსაც უწოდებენ *ჰარმონიულ ყალიბრებას* (სადაც $h^\mu_\nu = h_{\alpha\nu}\eta^{\alpha\mu}$ და $h \equiv Sp\, h^\mu_\nu = h^\mu_\mu$). ზოგადად ეს პირობა გამომდინარეობს ე.წ. ჰარმონიული კოორდინატების პირობიდან (ამოცანა 5)

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \quad \to \quad g^{\mu\nu}[g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}] = 0 \tag{15'}$$

ვნახოთ ახლა როგორ იქცევა თავისუფალი აინშტაინის განტოლება სუსტი გრავიტაციული ველის მიახლოვებაში. რიჩის ტენზორის საპოვნელად ვიპოვოთ თავდაპირველად რიმანის კოვარიანტული ტენზორი

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\alpha}R^\alpha_{\nu\sigma\rho} \tag{16}$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\beta\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}\right] - g_{\alpha\beta}\left[\Gamma^\alpha_{\mu\rho}\Gamma^\beta_{\nu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\beta_{\nu\rho}\right] .$$

შესაბამისად რიჩის ტენზორისათვის $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ ვღებულობთ

$$R_{\mu\nu} \cong \eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}\left[-\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h^\alpha_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 h^\alpha_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right] \tag{17}$$

რაც ყალიბრის პირობის (15) გამოყენების ($\partial_\mu h^\mu_\nu = \partial_\nu h/2$) შემდეგ პირდაპირ გვაძლევს

$$R_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}=-\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \qquad (18)$$

ამიტომ აინშტაინის განტოლება საბოლოოდ მიიღებს სახეს

$$\Box h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\Box h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}=0 \quad \Rightarrow \quad \Box h_{\mu\nu}=0 \quad . \qquad (19)$$

ეს კი სუსტი გრავიტაციული ველის ტალღური განტოლებაა.

განვიხილოთ ახლა ბრტყელი გრავიტაციული ტალღა, რომელშიც ველი იცვლება მხოლოდ ერთი მიმართულების (ვთქვათ, z-კოორდინატის მიმართულების) გასწვრივ სივრცეში. მაშინ განტოლება (19) გადადის განტოლებაში

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)h^{\mu\nu}=0 \qquad (20)$$

რომლის ამონახსნი, ისევე როგორც ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღისათვის, არის $(t\pm z/c)$-ცვლადების ნებისმიერი ფუნქცია. ამის გათვალისწინებით ჩვენ შეგვიძლია გარდა ჰარმონიული ყალიბრებისა (15) დავადოთ $h^{\mu\nu}$-ტენზორს კიდევ ოთხი პირობა გამომდინარე კოორდინატების შესაძლო გარდაქმნებიდან ბრტყელი ტალღის შემთხვევაში

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+\xi^{\mu}(t\pm z/c) \qquad (21)$$

რის შედეგად (ξ^{μ}-ფუნქციების სპეციალური შერჩევით) დამოუკიდებელი კომპონენტების რაოდენობა $h^{\mu\nu}$-ტენზორში საბოლოოდ დავიყვანოთ ორამდე ($10-4-4=2$). ეს კი სწორედ ფიზიკური გრავიტონის თავისუფლების ხარისხების აუცილებელი რაოდენობაა.

ამოცანები.

1. აჩვენეთ, რომ $\delta^4(x-y)$ ფუნქცია მრუდ სივრცეში ინვარიანტულია თუ
$$\delta^4(x-y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{[-g(x)]^{1/2}}\delta^4(x-y).$$

2. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული უდრის
$$\nabla_\mu J^\mu(x) \quad = \quad \frac{1}{[-g(x)]^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{[-g(x)]^{1/2} J^\mu(x)\right\}$$
რას უდრის ეს კოვარიანტული წარმოებული თუ ვექტორი $J^\mu(x)$ ნაწილაკთა დენია?

3. იპოვეთ რა სახე აქვს ნაწილაკთა ენერგია-იმპულსის ტენზორს $T^{\mu\nu}(x)$ მრუდ სივრცეში. აჩვენეთ რომ მისი კოვარიანტული წარმოებული უდრის ნულს.

4. დაამტკიცეთ:

   (1) ბიანკის იგივეობა $R^\alpha_{\beta\sigma\rho;\gamma} + R^\alpha_{\beta\gamma\sigma;\rho} + R^\alpha_{\beta\rho\gamma;\sigma} = 0$

   (2) $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ აინშტაინის ტენზორისათვის (თუ სრულდება ბიანკის იგივეობა)

5. დაამტკიცეთ რომ ჰარმონიული ყალიბრების პირობა (15) ექვივალენტურია ე.წ. “ჰარმონიული კოორდინატების” პირობისა $g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ სუსტი გრავიტაციის ზღვარში.

II. გრავიტაციული ურთიერთქმედება – ზოგადი განხილვა

გადავიდეთ ახლა დღეისათვის სტანდარტულ აინშტაინის განტოლებების გამოყვანაზე, რომელიც დაფუძვნებულია გრავიტაციული ველის (ზოგად კოორდინატული გარდაქმების მიმართ ინვარიანტული) ქმედების მონიმალურობის პრინციპზე. ეს ზოგადი განხილვა მოგვცემს თეორიის უფრო ღრმა გააზრების საშუალებას ისევე როგორც მის გაფართოების შესაძებლობას 4-განზომილებიანი დრო-სივრცის ფარგლებს გარეთ.

1. ველები მრუდე სივრცე-დროში.

ა) *ინტუიციური პრეამბულა*.

თავისუფალი მატერიალური ველების განხილვა გარე გრავიტაციულ ველში ხდება მზგავსად იმისა როგორ იქნა განხილული თავისუფალი ნაწილაკების მოძრაობა ამ ველში (**II-II-**(5)). ზოგადად გასაგებია რომ ჩვენ ამ შემთხვევაშიც ვიმყოფებით რიმანის 4-განზომილებიან მრუდე სივრცე-დროში და, ჩვეულებრივ, თავისუფალი ველების წარმოებულები მინკოვსკის სივრცე-დროში უნდა შეიცვალოს მათი ზოგად-კოვარიანტული წარმოებულებით (იხ. **I-II-**(20-22)). შესანიშნავია რომ ეს წმინდა გეომეტრიულ შეხედულება - *ველების წარმოებულები უნდა იყვნენ განმარტული როგორც ჭეშმარიტი ვექტორები (ტენზორები) მრუდ სივრცეში* - საკმარისია იმისთვის რომ დავადგინოთ რა სახე აქვს მათ გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას. მართლაც, მრუდე სივრცეში გადასვლის შედეგად

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x) \quad , \quad \partial_\mu \to \nabla_\mu \tag{1}$$

თავისუფალი – სკალარული (φ) , ელექტრომაგნიტური (A_μ) და ა.შ. – მტერიალური ველების ქმედება S_M იძენს უნივერსალური სახის დამატებით წევრებს გამომდინარე ამ მოდიფიკაციიდან

$$S_M = \int d^4x\, \varsigma_M(\varphi, A, \ldots) \quad \Rightarrow \quad S_M(g) = \int d^4x\, (-g)^{1/2} \varsigma_M(g, \varphi, A, \ldots) \tag{2}$$

სადაც მინკოვსკის ‘‘ბრტყელი’’ η-ტენზორის მაგივრად მოცემული ველების ყველა ტენზორულ ნამრავლს ‘‘კრავს’’ ზოგადი მეტრიკული ტენზორი $g_{\mu\nu}$, მისი წარმოებულები კი განსაზღვრავენ ამ ველების კოვარიანტულ წარმოებულებში შემავალ აფინური ბმულობის კოეფიციენტებს (იხ. **I-II-**(36)). ამასთან ერთად ჩვენ გავითალისწინეთ, რომ ინვარიანული ქმედების ასაგებათ საჭიროა თვით ინფინიტიზემალური სივრცე-დროის მოცულობის d^4x კოვარიანტული განსაზღვრა. ადვილად შესამომწემებელია (იხ. **I-II,** ამოცანა 10), რომ ეს მოცულობა არ არის ინვარიანტი ზოგად-კოვარიანტული გარდაქმნების მიმართ მაგრამ კომბინაცია

$$[-g(x)]^{1/2} d^4 x \tag{3}$$

(სადაც g მეტრიკული ტენზორის დეტერმინანტია) ინვარიანტული სიდიდეა[5].

ანალოგია მიღებულ ქმედებასა (2) და ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედებას შორის (იხ. II-III-(30)) თვალსაჩინოა. მართლაც, იქ გვაქვს ელექტრომაგნიტური ველი A_μ, რომლის წყაროს წარმოადგენს შენახვადი დენი j^μ, აქ კი მეტრიკული ტენზორი $g_{\mu\nu}$, რომლის წყაროა, როგორც დავრწმუნდებით მალე, არის ტენზორული სიდიდე $T^{\mu\nu}$, რომელიც ბრტყელი დრო-სივრცის ზღვარზე გადადის შენახვად ენერგია-იმპულსის ტენზორში $T^{\mu\nu}$.

ამრიგად ჩნდება სერიოზული განცდა, რომ მეტრიკული ტენზორი $g_{\mu\nu}$ სწორედ ის პირველადი სიდიდეა, რომელიც ფუნდამენტურად განსაზღვრავს გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას - ისე როგორც ელექტრომაგნიტური ვექტორ-პოტენციალი A_μ განსაზღვრავს ელექტრომაგნიტურ ურთიერთქმედებას. ამასთან, თუ ჩვენ განვიხილავთ მეტრიკას $g_{\mu\nu}(x)$ როგორც ფიზიკურ ველს მაშინ სრულ გრავიტაციულ ლაგრნჟიანში, გარდა მეტრიკისა და (დანარჩენი) ველების ურთიერთქმედებისა, უნდა შედიოდეს ამ თვით $g_{\mu\nu}(x)$-ველის კინეტიკური წევრიც. ეს წევრი შეიძლება დავადგინოთ თანახმად სივრცე-დროის სიმრუდის თვისებისა, რომელიც ასახულია შესაბამის სიმრუდის სიდიდეებში – რიმანის ტენზორში $R^\mu_{\nu\sigma\rho}$, რიჩის ტენზორში $R_{\nu\rho}$ ან რიჩის სკალარი (იხ. I-II-(30,32,37)). მათ შორის მხოლოდ რიჩის სკალარია ინვარინატული ზოგად-კოვარიანტული გარდაქმნების მიმართ. ამიტომ სწორედ ის იქნებოდა უმარტივესი არჩევანი მეტრიკული ველის კინეტიკური წევრისთვის.

ბ) *<u>გრავიტაციული ლაგრანჟიანი და ქმედება (პირველი შეხება)</u>*

ამრიგად გამომდინარე ყოველივე ზემოთქმულიდან მივდივართ ზოგად გრავიტაციულ ქმედებასთან $(c=1)$

$$S = S_{gr} + S_M = \int d^4x(-g)^{1/2}\left[\frac{R-2\Lambda}{2\kappa} + \varsigma_M(g,\varphi,A,...)\right] \tag{4}$$

[5] ნიშანი "-" ფესვქვეშ გამოხატავს მეტრიკული ტენზორის $g_{\mu\nu}(x)$ შესაბამისობას მინკოვსკის ტენზორთან $\eta_{\mu\nu}$ $(\det\eta_{\mu\nu} = -1)$ ბრტყელ სივრცეში გადასვლის დროს.

სადაც κ - გრავიტაციული ურთიერთქმედების კონსტანტაა, რომელიც დაკავშირებულია (ადრე შემოყვანილ, **იხ. II-5)** ნიუტონის კონსტანტასტან, $\kappa = 2G$. გარდა რიჩის სკალარისა ჩვენ ჩავრთეთ გრავიტაციის ლაგრანჟიანში

$$\varsigma_{gr}(g) = \frac{R - 2\Lambda}{2\kappa} \tag{5}$$

ნებისმიერი მუდმივაც, ე.წ. კოსმოლოგიური კონსტანტა Λ , რომელიც ასევე დაშვებულია ზოგად კოვარიანტული გარდაქმენბით. როგორც ვხედავთ, სრული გრავიტაციული ლაგრანჟიანი $\varsigma_{gr} + \varsigma_M$ ქმედების ინტეგრალის ქვეშ საოცრად მარტივი და უნივერსალურია. ამასთან, ის აკმაყოფილებს ძირითად დინამიურ პირობას - მეტრიკის მოძრაობის განტოლება შემოფარგლულია მეორე რიგის წარმობულებით (**იხ**. ქვემოთ), როგორც ეს არის დანარჩენი ველებისთვისაც ς_M- ლაგრანჟიანში.

ამ ქმედების ინტეგრალს (4) უწოდებენ *ჰილბერტ-აინშტაინის ქმედებას*. ის განსაზღვრავს მეტრიკის მოძრაობის განტოლებებს - ანუ *აინშტაინის განტოლებებს*.

2. აინშტაინის განტოლებები – ახალი წარმოჩენა.

მოვითხოვოთ ახლა თანახმად ქმედების მინიმალურობის პრინციპისა რომ სრული გრავიტაციული ქმედება (4) სტაციონარულია მეტრიკის ინფინიტიზემალური გარდაქმნის მიმართ

$$g_{\mu\nu}(x) \;\to\; g_{\mu\nu}(x)+\delta g_{\mu\nu}(x) \tag{6}$$

ანუ

$$\delta S \;=\int d^4x\left(\delta(-g)^{1/2}\varsigma_{gr}+(-g)^{1/2}\delta\varsigma_{gr}+\delta[(-g)^{1/2}\varsigma_M]\right)=0 \tag{7}$$

(i) ამრიგად ჩვენ პირველ რიგში დაგვჭირდება მეტრიკასთან დაკავშირებული სიდიდეების ვარირება, კერძოდ (ამოცანა 1)

$$\delta g^{\mu\nu}=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}\;\;,\;\;\delta(-g)^{1/2}=\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{8a}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}}=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\;\;,\;\;\frac{\partial(-g)^{1/2}}{\partial g_{\alpha\beta}}=\frac{1}{2}(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta} \tag{8b}$$

(ii) შემდეგ -

$$\delta\varsigma_{gr}=\frac{1}{2\kappa}(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}) \tag{9}$$

პირველი წევრი აქ არ წარმოადგენს პრობლემას, მეორე კი მოითხოვს გარკვეულ დათვლას. თანახმად რიჩის ტენზორის ზოგადი სახისა (**I-II-(**32)) ის შეიძლება გაიწეროს აფინური ბმულობის კოვარიანტულ წარმოებულებში (ამოცანა 2)

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\delta(\Gamma^{\rho}_{\mu\nu;\rho}-\Gamma^{\rho}_{\mu\rho;\nu})=(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu})_{;\rho}-(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho})_{;\nu}$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ, რომ მეტრიკული ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული ყოველთვის ნულია (**იხ**. I-II-(34)). ორივე წევრი ბოლო ტოლობაში

წარმოადგენს ფაქტობრივად ზოგადი კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტულ დივერგენციას, $V^{\mu}_{;\mu}$. ასეთი დივერგენცია უდრის

$$V^{\mu}_{;\mu}=\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}}+\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}V^{\nu}=\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}g_{\sigma\mu,\nu}V^{\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,V^{\mu}\right) \tag{10}$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ აფინური ბმულობის ფორმულა **I-II**-(36) და თანაფარდობა

$$g^{\mu\sigma}g_{\sigma\mu,\nu}=\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\ln g=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\sqrt{-g} \tag{11}$$

ამრიგად ჩვენ ვხედავთ რომ რიჩის ტენზორის ვარიაციასთან დაკავშირებული წევრი (9)-ში დაიყვანება სახემდე (10), რაც ქმედების ინტეგრალში ჩასმის შემდეგ იძლევა მხოლოდ ზედაპირულ ეფექტს გაუსის თეორემის თანახმად

$$\int d^4x(-g)^{1/2}V^{\mu}_{;\mu}=\int d^4x\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,V^{\mu}\right)=\int_{\sigma}d\sigma_{\mu}\sqrt{-g}\,V^{\mu}\ . \tag{12}$$

ეს ეფექტი კი ნულოვანია გამომდინარე ქმედების ვარირების პირობიდან – ველების ვარიაციები და თვით ველებიც ქრებიან უსასრულო მოცულობის ზედაპირზე. ეს ნიშნავს რომ წმინდა გრავიტაციის ლაგრანჟიანის ვარიაციიდან (9) მხოლოდ პირველი წევრი იძლევა არანულოვან წვლილს[6].

(**iii**) და ბოლოს მატერიალური ველების ლაგრანჟიანის ς_M ვარიაციის შესახებ. თუ გავაერთიანებთ მას მეტრიკის დეტერმინანტის მამრავლთან, $\varsigma'_M\equiv(-g)^{1/2}\varsigma_M$ (**იხ**. (7)) და ისე დავითვლით ვარიაციას მივიღებთ

$$\begin{aligned}\delta\varsigma'_M&=\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu,\rho}}\delta g_{\mu\nu,\rho}=\\&=\left[\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu}}-\left(\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu,\rho}}\right)_{,\rho}\right]\delta g_{\mu\nu}+\left(\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu,\rho}}\delta g_{\mu\nu}\right)_{,\rho}\end{aligned} \tag{13}$$

[6] წინაღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებდით მესამე რიგის წარმოებულების წევრებს მეტრიკის მოძრაობის განტოლებაში.

სადაც ბოლო წევრი წარმოდგენს ვექტორის სრულ დივერგენციას და ისევ თანახმად გაუსის თეორემისა (12) არ იძლევა წვლილს ქმედების ინტეგრალში.

ამრიგად როცა შევკრებთ ყველაფერს (**i, ii, iii**) ერთად მივიღებთ

$$\delta S = \int d^4x(-g)^{1/2}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{R-2\Lambda}{2\kappa}-\frac{1}{2\kappa}R^{\mu\nu}+(-g)^{-1/2}\left[\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu}}-\left(\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu,\rho}}\right)_{,\rho}\right]\right)\delta g_{\mu\nu} = 0 \quad (14)$$

სადაც ბოლო წევრი შეესაბამება მატერიის ენერგია-იმპულსის ტენზორის ანალოგს მრუდე რიმანის სივრცე-დროში

$$-\frac{\mathrm{T}^{\mu\nu}}{2} = (-g)^{-1/2}\left[\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu}}-\left(\frac{\partial\varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu,\rho}}\right)_{,\rho}\right] \quad . \quad (15)$$

ამრიგად იმის გათალისწინებით რომ მეტრიკის ვარიაცია $\delta g_{\mu\nu}(x)$ ნებისმიერია საბოლოოდ ვღებულობთ *აინშტაინის განტოლებათა სისტემას*

$$R^{\mu\nu}-(R/2-\Lambda)g^{\mu\nu} = -\kappa\mathrm{T}^{\mu\nu} \quad . \quad (16)$$

როგორც ვხედავთ ამ განტოლებებიდან, სწორედ ტენზორი $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ წარმოადგენს გრავიტაციული ველის ფუნდამენტურ წყაროს.

3. ენერგია-იმპულსის ტენზორი და ფსევდოტენზორი.

ა) *მატერიალური ველების ენერგია-იმპულსის ტენზორი*

დავწრმუნდეთ ახლა რომ ტენზორი $T^{\mu\nu}$ (15) განსაზღვრავს მატერიალური ველების ენერგია-იმპულსის ტენზორს ბრტყელ დრო-სივრცის ზღვარში. მართლაც, ყველა თავისუფალი მატერიალური ველისათვის ლაგრანჟიანი ς'_M დამოკიდებულია მხოლოდ მეტრიკულ ტენზორზე და არა მის წარმოებულზე, რის გამო ფორმულა (15) იძენს განსაკუთრებით მარტივ სახეს

$$T^{\mu\nu} = -2(-g)^{-1/2}\frac{\partial \varsigma'_M}{\partial g_{\mu\nu}} \quad . \tag{15'}$$

განვიხილოთ მაგალითისათვის თავისუფალი სკალარული და ელექტრომაგნიტური ველების ლაგრანჟიანი. იმის გათალისწინებით, რომ სკალარული ველის კოვარიანტული წარმოებული ემთხვევა ჩვეულებრივ წარმოებულს, $\varphi_{;} = \varphi_{,}$, ხოლო ვექტორული ველისათვის კოვარიანტული როტორი კი უდრის ჩვეულებრივ როტორს

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}A_{\rho} - (A_{\nu,\mu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}A_{\rho}) = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \tag{17}$$

ერთადერთი განზოგადოება ბრტყელიდან მრუდე სივრცეში გადასვლისას არის მეტრიკული ტენზორების შეცვლა $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x)$. ამრიგად, ამ ველების ლაგრანჟიანი მრუდე სივრცეში იქნება

$$\varsigma'_M / \sqrt{-g} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} \tag{18}$$

სადაც $F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$. როგორც ველოდით, ეს ლაგრანჟიანი არ შეიცავს მეტრიკული ტენზორის წარმოებულებს[7], რის შედეგად ფორმულიდან (15') და

---

[7] როგორც შეიძლება დავინახოთ, თუ სკალარული ველისათვის ეს გარემოება ტრივიალური ფაქტია, ელექტრომაგნიტური ველისათვის ის ერთმნიშვნელოვნად დაკავშირებულია ამ ველის ყალიბურ ბუნებასთან (ანუ მის 4-როტორის $F_{\mu\nu}$ სახით წარმოჩენასთან ლაგრანჟიანში) – სხვანაირად ტოლობა (17) არ შესრულდებოდა.

ზემოთ მოყვანილი ტოლობების (8b) გამოყენებით ვღებულობთ ამ ველების ენერგია-იმპულსის ტენზორებს

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}(\varphi) = \partial^{\mu}\varphi\,\partial^{\nu}\varphi - g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi\,\partial_{\nu}\varphi + \frac{m^2}{2}\varphi^2\right)$$

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}(A) = -\;F^{\mu\rho}F_{\rho}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \qquad (19)$$

რომლებიც ბრტყელ სივრცეში ($g_{\mu\nu}(x) \to \eta_{\mu\nu}$) გადადიან ცნობილ გამოსახულებებში (**ის**. მაგალითად **II-III**-(31)).

ამასთან **ხაზგასასმელია**, რომ განსხვავებით ბრტყელი სივრცის ენერგია-იმპულსის ტენზორისა $T^{\mu\nu}$ ტენზორი $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ არ არის შენახვადი სიდიდე თუმცა კი მისი კოვარიანტული წარმოებული ნულის ტოლია. მართლაც, როგორც ვაჩვენეთ წინა თავში (**ის**. **III-I**-(6,7,7')) აინშტაინის განტოლების (16) მარცხენა მხარე უდრის ნულს როცა მისგან ვიღებთ კოვარიანტულ წარმოებულს (ავღნიშნოთ, რომ კოსმოლოგიური წევრი განტოლებაში თავისთავად ქრება ამ ოპერაციის დროს რადგან მეტრიკული ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული ყოველთვის ნულია (I-II-(34))). აქედან ამ განტოლების მარჯვენა მხარის კოვარიანტული წარმოებულიც უნდა გვაძლევდეს ნულს, ანუ

$$\nabla_{\mu}\mathrm{T}^{\mu\nu} \equiv \mathrm{T}^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad . \qquad (20)$$

ის გარემოება რომ მატერიალური ველების (და ასევე ნაწილაკების) ენერგია-იმპულსი თავისთავად არ ინახება გამოხატავს ფუნდამენტურ ფაქტს, რომ გრავიტაციულ ველში მკაცრად უნდა ინახებოდეს მოხოლოდ ჯამური – მატერიალური და გრავიტაციული ველების – ენერგია და იმპულსი (გასაგებია, რომ მხოლოდ ამ პირობებში შეიძლება ვისაუბროთ ერთიან ჩაკეტილ სისტემაზე). რომ დაწრმუნდეთ ამაში უნდა ჯერ შემოვიყვანოთ შესაბამისი ტენზორი გრავიატციული ველისათვის.

ბ) *გრავიტაციული ველის ენერგია-იმპულსის ფსევდოტენზორი*

დავაკვირდეთ უფრო დეტალურად გრავიტაციული ველის ქმედებას, რომელიც მოცემულია გამოსახულებაში (4). საინტერესოა, რომ მიუხედავათ იმისა რომ ის შეიცავს მეტრიკის მეორე რიგის წარმოებულებს (წარმოდგენილ რიჩის სკალარში, **I-II-**(30,32,37)), აინშტაინის განტოლებებში (16) არ შედიან მეორე რიგზე მაღალი წარმოებულების წევრები. ამის მიზეზია ის რომ თვითონ რიჩის ტენზორი,

როგორც ვნახეთ ((იხ. ზემოთ (ii)), არ იძლევა წვლილს ქმედების ვარიაციაში. ეს ნიშნავს, რომ გრავიტაციის ქმედება თვისობრივად დამოკიდებულია რიჩის სკალარის მხოლოდ იმ ნაწილზე R_0, რომელიც შეიცავს მეტრიკის ტენზორს და მის პირველი რიგის წარმოებულებს

$$S_{gr} = \int d^4x(-g)^{1/2}\frac{R-2\Lambda}{2\kappa} = \int d^4x(-g)^{1/2}\frac{R_0-2\Lambda}{2\kappa} = \int d^4x\,\varsigma'_{gr} \qquad (21)$$

მეორე რიგის წარმოებულების წევრები კი R-ში დაიყვანება სრულ წარმოებულების წევრებამდე, რომლებიც ქმედებაში (21) არ იძლევიან წვლილს

$$(-g)^{1/2}R = (-g)^{1/2}R_0 + \partial_\mu W^\mu \qquad (21a)$$

სადაც

$$R_0 = g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho}) \qquad (21b)$$

ამასთან ერთად მნიშვნელოვანია გვესმოდეს, რომ განსხვავებით R-ისაგან R_0, და მთლიანად ლაგრანჟიანი ς'_{gr}

$$\varsigma'_{gr} = (-g)^{1/2}\frac{R_0-2\Lambda}{2\kappa} \qquad (21c)$$

აღარაა ჭეშმარიტი სკალარი[8] (თუმცა კი ქმედება (21) ინვარიანტულია განურჩევლად იმისა R-ს ვწერთ ინტეგრალის ქვეშ თუ R_0-ს). ამრიგად ამ ლაგრანჟიანიდან აგებული გრავიტაციული ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორი იქნება ფაქტობრივად ჰსევდოტენზორი, რომელიც არაკოვარიანტულად იცვლება როცა ერთი ათვლის სისტემიდან გადავდივართ მეორეში (იხ. დამატებითი კომენტარიები ამ პუნქტის ბოლოს). მიუხედავათ ამისა მხოლოდ ამ არაკოვარიანტული სიდიდის გათვალისწინებით შეიძლება ლაპარაკი სრული ენერგია-იმპულსის შენახვაზე მრუდე სივრცე-დროში.

მთლიანი სისტემის – გარვიტაციული ველი პლიუს მატერია – ენერგია-იმპულსის ტენზორი ჩნდება მაშინ როცა, როგორც ადრე (იხ. II-III-5), ვსაუბრობთ ჩაკეტილ სისტემაზე, რომელშიც 4-კოორდინატა x_μ განიხილება როგორც

8 ეს გამომდინარეობს იქიდან რომ აფინური ბმულობის კოეფიციენტები $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ R_0-ში (21b) არ გარდაიქმნებიან როგორც ტენზორები მიუხედავად კოვარიანტული სახისა (იხ. I-II-(21).

ციკლიური ცვლადი. ამიტომ სრული ლაგრანჟიანის $\varsigma' = \varsigma'_{gr} + \varsigma'_{M}$ წარმოებული ამ კოორდინატის მიმართ იქნება

$$\frac{\partial \varsigma'}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial \varsigma'}{\partial g_{\mu\nu}} g_{\mu\nu,\rho} + \frac{\partial \varsigma'}{\partial g_{\mu\nu.\sigma}} g_{\mu\nu,\sigma\rho} + \frac{\partial \varsigma'}{\partial \phi} \phi_{,\rho} + \frac{\partial \varsigma'}{\partial \phi_{,\sigma}} \phi_{,\sigma\rho} \qquad (22)$$

სადაც ϕ აღნიშნავს ყველა შესაძლო მატერიალურ ველს $\phi = \varphi, A_{\mu}, \ldots$ აქედან თუ გამოვიყენებთ გრავიტაციული ველის და მატერიალური ველების მოძრაობის განტოლებებს

$$\frac{\partial \varsigma'}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \varsigma'}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} = 0$$

$$\frac{\partial \varsigma'}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \varsigma'}{\partial \phi_{,\rho}} = 0 \qquad (23)$$

მივიღებთ სრული ენერგია-იმპულსის შენახვის განტოლებას

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left[\frac{\partial \varsigma'}{\partial g_{\mu\nu.\rho}} g_{\mu\nu,\sigma} + \frac{\partial \varsigma'}{\partial (\phi_{,\rho})} \phi_{,\sigma} - g^{\rho}_{\sigma} \zeta' \right] = 0 \qquad (24)$$

აქ

$$t^{\rho}_{\sigma} = \frac{\partial \varsigma'}{\partial g_{\mu\nu.\rho}} g_{\mu\nu,\sigma} - g^{\rho}_{\sigma} \zeta'_{gr} \qquad (25)$$

გრავიტაციული ველის ენერგია-იმპულსის ფსევდოტენზორია, ხოლო

$$\mathrm{T}^{\rho}_{\sigma} = \frac{\partial \varsigma'}{\partial (\phi_{,\rho})} \phi_{,\sigma} - g^{\rho}_{\sigma} \zeta'_{M} \qquad (26)$$

მატერიალური ველების ენერგია-იმპულსის ტენზორი, რომელიც სკალარული და ელექტრომაგნიტური კერძო შემთხვევებისათვის ღებულობს სახეს (19). როგორც ველოდით, მათი ჯამი მკაცრად ინახება მრუდე სივცე დროში

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (t^{\rho}_{\sigma} + \mathrm{T}^{\rho}_{\sigma}) = 0 \qquad (27)$$

შევაჯამოთ ჩვენი განხილვა. გრავიტაციული ველის წყაროს წარმოადგენს მატერიალური ველების ტენზორი $T^{\mu\nu}$ მრუდე სივრცეში. ეს ტენზორი განსხვავებით მისი "ბრტყელი" ანალოგისა $T^{\mu\nu}$ არ არის შენახვადი სიდიდე – ის ინახება მხოლოდ ჯამში გრავიტაციული ველის ენერგია-იმპულსის პსევდოტენზორთან (25). ამ სიდიდის არაკოვარიანტული ბუნება წარმოადგენს თეორიის სერიოზულ პრობლემას, რადგან ზოგადათ შეუძლებელია გრავიტაციული ველის ენერგიის ცალსახა განსაზღვრა – ერთ ათვლის სისტემაში მას შეიძლება ჰქონდეს ერთი მნიშვნელობა, მეორეში კი სრულებით განსხვავებული. ამასთან დაკავშირებით ბუნებრივია კითხვა – ხომ არ ჯობდა აგვეგო გრავიტაციული ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორი სრული რიჩის სკალარის (R) გამოოყენებით ლაგრანჟიანში (21c) და არა მისი "შეკვეცილი" ვერსიით (R_0). მაშინ, რა თქმა უნდა ეს სიდიდე იქნებოდა ნამდვილი ტენზორი, თუმცა კი დამოკიდებული მეორე რიგის წარმოებულების წევრებზე მეტრიკის მიმართ. ამის გამო ის ვერასოდეს ვერ მიგვიყვანდა სრულ შენახვად ენერგია-იმპულსის ტენზორამდე მატერიალური ველების ტენზორთან ერთად.

ამრიგად ზოგადათ ჩვენ გვაქვს ალტერნატივა გრავიტაციული ველის ენერგია-იმპულსისათვის – ან *შენახვადი პსევდოტენზორი* ან *არაშენახვადი ტენზორი.* საბედნიეროდ, ბრტყელი გრავიტაციული ტალღისათვის (**იხ. III-I-4**) ეს ორი მოთხოვნა (კოვარიანტობა პლიუს შენახვადობა) თავსებადია – მისი ენერგია-იმპულსი ყოველთვის აღიწერება *შენახვადი ტენზორით*. მართლაც, დავითვალოთ თანახმად ფორმულებისა (21b,c) და (25) ამ ტენზორის ზოგადი სახე

$$t_{\mu}^{\nu}\sqrt{-g} = (\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} - g_{\beta}^{\nu}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma})(g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})_{,\mu} - g_{\mu}^{\nu}\varsigma'_{gr} \quad . \qquad (25a)$$

მივიღოთ ახლა, რომ მეტრიკული ტენზორი ამ გამოსახულებაში მხოლოდ ერთი ცვლადის $X = x^0 - x^3$ ფუნქციაა (ანუ ტალღა ვრცელდება დადებითი x^3-კოორდინატის მიმართულებით). მაშინ მას (ჰარმონიული ყალიბრებისა (III-I-(15')) და $X_{,\mu}X^{,\mu} = 0$ პირობის გათვალისწინებით) ექნება მარტივი და აშკარად კოვარიანტული სახე

$$t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\mu}g^{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{2}g_{,\mu}g^{,\nu}\right) \qquad (g_{,\mu} \equiv g_{\alpha\beta,\mu}g^{\alpha\beta},\ g^{,\nu} \equiv g_{\alpha\beta}^{,\nu}g^{\alpha\beta}) \quad . \qquad (25b)$$

ამრიგად ყველა "ბრტყელი" კოორდინატული გარდაქმნებისას (**იხ. III-I-**(21)), რომლებიც ტოვებენ მეტრიკას ერთი ცვლადის (X) ფუნქციად, t_{μ}^{ν} გარდაიქმნება როგორც ჭეშმარიტი ტენზორი (ამოცანა 6). შედეგად - გრავიტაციული ბრტყელი

ტალღის ენერგია ცალსახად განსაზღვრულია და ეს ენერგია სინათლის სიჩქარით გადაიტანება z-ღერძის მიმართულებით.

4. ელექტროგრავიტაცია – უნიფიკაციის ცდა.

ელექტრომაგნიტურ და გრავიტაციულ ურთიერთქმედებებს შორის მრავალმხრივი ანლოგიიდან – ამ ურთიერთქმედებების ყალიბური ბუნება, ერთნაირი სტატიკური ზღვარი და სხვა - იბადება კანონზომიერი შეკითხვა: შეიძლება თუ არა რომ ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედებაც ჩნდებოდეს მეტრიკიდან ისევე როგორც გრავიტაციული, ანუ წმინდა გეომეტრიულ საფუძველზე?

კალუზა-კლაინის მოდელის (1921) თანახმად ეს, როგორც ჩანს, შესაძლებელია დამატებით განზომილებიან სივრცე-დროში. ამ მოდელში განიხილება 5-განზომილებიანი სამყარო, რომელიც აღიწერება მეტრიკული ტენზორით

$$\widetilde{g}_{AB} \qquad A, B = 0,1,2,3,5 \qquad . \tag{28}$$

ამ ტენზორში მიღებულია შემდეგი გაიგივება

$$\widetilde{g}_{55} \quad , \qquad \widetilde{g}_{5\mu} = \widetilde{g}_{\mu 5} = \widetilde{g}_{55} A_{\mu} \quad , \quad \widetilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \widetilde{g}_{55} A_{\mu} A_{\nu} \tag{29}$$

სადაც A_{μ} - ელექტრომაგნიტური ველია, ხოლო $g_{\mu\nu}$ - 4-განზომილებიანი ქვესივრცის მეტრიკული ტენზორი. ზოგადათ ეს 5-განზომილებიანი სამყარო შეიძლება წარმოვიდგინოთ ცილინდრის სახით, რომლის გვერდითი ზედაპირი შეესაბამება ჩვენ 4-განზომილებიან სივრცე-დროს, ხოლო მეხუთე განზომილება კი – ცილინდრის წრეწირს, რომლის რადიუსია r_5. თანამედროვე მონაცემებით ეს რადიუსი არ შეიძლება იყოს საგრძნობლაბ მეტი ვიდრე 10^{-17} სმ.

4-განზომილებიანი ქმედების (4) პირდაპირი განზოგადოებით 5-განზომილებიან შემთხვევაში გვექნება (კოსმოლოგიურ კონსტანტას სიმარტივისათვის არ განვიხილავთ)

$$S_5 = \int d^5 x \left(-\widetilde{g}\right)^{1/2} \frac{\widetilde{R}}{2\widetilde{\kappa}} \tag{30}$$

სადაც $\widetilde{R}$ არის 5-განზომილებიანი რიჩის სკალარი $\widetilde{R} = \widetilde{R}^{AB}\widetilde{g}_{AB}$.

მივიღოთ ახლა, რომ $g_{\mu\nu}$ და A_μ დამოუკიდებელია მეხუთე კოორდინატისაგან (x^5) და მეტრიკის $\widetilde{g}_{55}$-ელემენტი კონსტანტია. ამას გარდა, როგორც ავღნიშნეთ ზემოთ, მეხუთე განზომილება სასრული ზომისაა და მოქცეულია ზემცირე r_5 რადიუსის ცილინდრში. აქედან - ზემოთმოყვანილი მეტრიკის კომპონენტების ჩასმით S_5-ქმედებაში (30) და ინტეგრირებით x^5-კოორდინატის მიმართ - პირდაპირ ვღებულობთ

$$S = \int d^4 x \left(-g\right)^{1/2} \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right] \tag{31}$$

სადაც g და R 4-განზომილებიანი სიდიდეებია, $F_{\mu\nu}$ - მაქსველის ველის დაძაბულობა. მათი ურთიერთქმედების კონსტანტები გამოისახებიან როგორც

$$\kappa = \frac{\widetilde{\kappa}}{2\pi r_5} \qquad e^2 = \frac{\widetilde{\kappa}}{\widetilde{g}_{55}\pi r_5} \quad . \tag{32}$$

არაჩვეულებრივად საინტერესოა, რომ საკმაოდ მარტივი და ბუნებრივი დაშვების პირობებში აშკარად იჩენს თავს ელექტრომაგნიტური და გრავიტაციულ ურთიერთქმედებების ერთიანი გეომეტრიული წარმოშობის მექანიზმი. ბოლო ათწლეულების განმავლობაში ამ შესაძლებლობამ მიიქცია სერიოზული ყურადღება (სხვა ურთიერთქმედებებთანაც მიმართებაში) – განსაკუთრებით ე.წ. სიმების თეორიებში სადაც დამატებით განზომილებები ამ თეორიების ერთერთი ბუნებრივი ინგრედიენტია.

ამოცანები.

1. მიიღეთ ვარიაციის ფორმულები (8a,b).
<u>მითითება</u>: მეორე ფორმულის გამოსაყვანათ ჯერ დაამტკიცეთ და მერე გამოიყენეთ ზოგადი თანაფარდობა $\delta \ln(\det M) = SpM^{-1}\delta M$, რომელიც სამართლიანია ნებისმიერი მატრიცისათვის.

2. აჩვენეთ, რომ

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left[\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right)_{;\lambda} - \left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right)_{;\nu}\right] = \left[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right]_{;\lambda}$$

3. იპოვეთ 5 განზომილებიანი აფინური ბმულობები Γ^{A}_{BC} მოცემული მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების მეშვეობით.

4. იპოვეთ 5-განზომილებიანი რიმანის ტენზორი, მისგან კი რიჩის ტენზორი და საბოლოოდ რიჩის სკალარი.

5. აჩვენეთ, რომ 5-განზომილებიანი ენერგია-იმპულსის ტენზორის T^{AB} ჩართვას S_5 ქმედებაში მივყევართ ერთდროულად ჩვეულებრივ 4-განზომილებიან გრავიტაციულ და ელექტრომაგნიტურ ურთიერთქმედებებთან, სადაც პირველის წყაროა ენერგია-იმპულსის ტენზორი $T^{\mu\nu}$, ხოლო მეორესი კი - ელექტრომაგნიტური დენი j^{μ}.

6. მიიღეთ ფორმულები (25a,b) გრავიტაციული ველის ენერგია-იმპულსის პსევდოტენზორისათვის. აჩვენეთ რომ ბრტყელი ტალღის შემთხვევაში (25b) ის გარდაიქმნება როგორც ჭეშმარიტი ტენზორი ერთგანზომილებიანი კოორდინატული გარდაქმნების $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^0 - x^3)$ მიმართ

III. ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ძირითადი გამოყენებები

1. სტრატეგია.

ჩვენ ვხედავთ, რომ აინშტაინის განტოლებები დაწერილია სივრცე-დროის ისეთი ფუნდამენტური მახასიათებლებისთვის, როგორიცაა მეტრიკული ტენზორის $g_{\mu\nu}(x)$ კომპონენტები. ზოგადი ფარდობითობის თეორია ეს პირველი მაგალითია ფიზიკაში, როცა სისტემის საბაზისო განტოლებები ასე ფუნდამენტურად დაკავშირებულნი არიან დროისა და სივრცის ზოგად გეომეტრიულ მახასიათებლებთან. ახლა ჩვენ გვინდა დავითვალოთ ეს მახასიათებლები. მას შემდეგ რაც ისინი გვეცოდინება, ჩვენ მათ გამოვიყენებთ ფიზიკური სისტემის მოძრაობის განტოლებაში. აინშტაინის განტოლებები ზუსტად ან საიმედო მიახლოებით შეიძლება ამოიხსნას ფიზიკური სისტემის მხოლოდ შეზღუდული კლასისათვის და მხოლოდ მათთვის შეგვიძლია გავაკეთოთ გარკვეული და ცალსახა დასკვნები.

ჩვენთვის საბედნიეროდ ამ განტოლებებს აქვთ ამოხსნა სფერული სხეულის გრავიტაციული ველისათვის ან, ზოგადად, გრავიტაციული მასების სტატიკური განაწილებისთვის, რომელსაც გააჩნია სფერული სიმეტრია. ეს კი სამყაროში ტიპიური შემთხვევაა, რომელიც - სხვა მრავალ შემთხვევასთან ერთად - მოგვევლინება ისეთი ცნობილი მაგალითით როგორიცაა მზის პლანეტარული სისტემა. ამრიგად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ბუნებამ უხვად “შეამზადა” ისეთი მაგალითები, რომლებიც წარმოადგენენ თითქმის ზუსტ თეორიულ მოდელს და რომელთათვისაც არსებობს ცალსახა ამოხსნა.

2. შვარცშილდის სივრცე-დრო.

ა) ცენტრალური სიმეტრია.

ცხადია, რომ სფერული სხეულის გრავიტაციულ ველს გააჩნია სფერული სიმეტრია. ამიტომ სივრცე-დროის ინტერვალში შემავალი მეტრიკული ტენზორი $g_{\mu\nu}(x)$ უნდა იყოს ერთი და იგივე ყველა წერტილში, რომლებიც განლაგებულია სტატიკურად გრავიტირებადი სხეულის ცენტრიდან ერთი და იგივე მანძილზე. ამასთან ერდათ ამ მეტრიკული ტენზორის ელემენტები – გამომდინარე განხილვადი სისტემის არსიდან – არ არიან დამოკიდებული დროზე.

როგორც ვიცით ბრტყელი მინკოვსკის სივრცე-დროის ds^2 ინტერვალს გადაწერილს სფერულ კოორდინატებში აქვს სახე

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) = c^2 d\tau^2 \qquad (1)$$

ზოგადად, როცა ვიხილავთ მრუდ სივრცეს, მაგრამ სფერული სიმეტრია შენარჩუნებულია, მოსალოდნელია ახალი ფუნქციების წარმოქმნა ds^2-ში, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ r მანძილზე. ასეთ განზოგადოებას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ შემდეგი სახე:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \qquad (2)$$

გასაგებია რომ უსასრულო დიდ მანძილებზე $r \to \infty$ ყველა ეს ფუნქცია $A(r)$, $B(r)$ და $C(r)$ $\to 1$ ისე რომ ამ ზღვარზე ჩვენ გვაქვს ჩვეულებრივი ბრტყელი მინკოვსკის სივრცე.

ზოგადათ შესაძლოა ინტერვალში (2) გვქონდეს აგრეთვე არადიაგონალური წევრიც $D(r)drdt$. მაგრამ იგი შეიძლება გამოვრიცხოთ, თუ ზოგად კოვარიანტობასთან თანხმობაში გადავალთ ახალ დროზე: $t \to t' = t + \Phi(r)$, სადაც

$\Phi(r)$ არის მანძილის ნებისმიერი ფუნქცია. შესაბამისად დროის დიფერენციალში გვაქვს $dt = dt' - \frac{d\Phi}{dr}dr$. ამ გამოსახულების ჩასმით ds^2-ის გამოსახულებაში გვექნება:

$$ds^2 = A(r)\left[dt' - \frac{d\Phi}{dr}dr\right]^2 - B(r)dr^2 - C(r)r^2 d\Omega^2 + D(r)dr\left[dt' - \frac{d\Phi}{dr}dr\right] =$$

$$= A(r)dt'^2 - B'(r)dr^2 - C(r)d\Omega^2 r^2 \tag{3}$$

სადაც

$$B'(r) \equiv A(r)\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 - B(r) - D(r)\frac{d\Phi}{dr},$$

ხოლო Φ ფუნქცია შერჩეულია ისე, რომ

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{2}\frac{D(r)}{A(r)} \quad .$$

ჩვენ გადავედით ახალ დროზე, მაგრამ აგრეთვე შეგვიძლია ახალ მანძილზეც გადასვლა (არა გვაქვს უფლება მხოლოდ კუთხეების θ და φ-ს შეცვლისა რადგან მათზე სფერული სიმეტრია არ ვრცელდება). ვთქვათ $r'^2 = C(r)r^2$, მაშინ მივიღებთ ყველა შესაძლებელიდან ერთ უმარტივეს ფორმას:

$$ds^2 = A'(r')dt'^2 - B'(r')dr'^2 - r'^2 d\Omega^2 \qquad \left(d\Omega^2 \equiv d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right) \tag{4}$$

ან რაც იგივეა (შტრიხების გარეშე)

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad . \tag{5}$$

A(r) და *B(r)* ფუნქციებისთვის მოსახერხებელია ავირჩიოთ ახლა ახალი ცვლადები $A(r) = e^{\nu}c^2$ $B(r) = e^{\lambda}$, სადაც ν და λ მანძილის (r) ფუნქციებია, ხოლო c კი სინათლის სიჩქარე. მაშინ

$$ds^2 = e^{\nu}c^2 dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad . \tag{6}$$

აქედან მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებისათვის ვღებულობთ

$$g_{00} = e^{\nu} \qquad g_{rr} = -e^{\lambda} \qquad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2 \qquad g_{\varphi\varphi} = -r^2\sin^2\vartheta \tag{7}$$

და შესაბამისად

$$g^{00}=e^{-\nu} \qquad g^{rr}=-e^{-\lambda} \qquad g^{\vartheta\vartheta}=-r^{-2} \qquad g^{\varphi\varphi}=-r^{-2}\sin^{-2}\vartheta \quad . \tag{7'}$$

არანულოვანი აფინური ბმულობები გამოსახული მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებით ცნობილი ფორმულის თანახმად (ლექციები, ნაწილი II, თავი II)

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(g_{\sigma\beta,\gamma}+g_{\sigma\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\sigma}\right)$$

მიიღებენ სახეს (შტრიხი ქვემოთ ნიშნავს დიფერენცირებას r-ის მიმართ, ხოლო წერტილი ct-ის მიმართ)

$$\Gamma^{r}_{rr}=\frac{\lambda'}{2} \qquad \Gamma^{0}_{r0}=\frac{\nu'}{2} \qquad \Gamma^{r}_{00}=\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}$$

$$\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta}=-re^{-\lambda} \qquad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi}=-r\sin^{2}\vartheta\, e^{-\lambda} \qquad \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta}=\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}=\frac{1}{r} \tag{8}$$

$$\Gamma^{0}_{rr}=\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu} \qquad \Gamma^{r}_{r0}=\frac{\dot{\lambda}}{2} \qquad \Gamma^{0}_{00}=\frac{\dot{\nu}}{2}$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi}=-\sin\vartheta\cos\vartheta \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi}=ctg\,\vartheta$$

ხოლო დანარჩენი კომპონენტები ნულია.

ახლა როცა ნაპოვნია აფინური ბმულობები შეგვიძლია განვსაზღვროთ რიჩის ტენზორის კომპონენტებიც თანახმად ფორმულისა (ლექციები, ნაწილი II, თავი II)

$$R_{\mu\nu}=R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \quad .$$

ამ ტენზორის არანულოვანი კომპონენტების დათვლა, კერძოდ კომპონენტებისა

$$R_{00}=? \tag{9}$$

$$R_{rr}=? \tag{10}$$

$$R_{\vartheta\vartheta}=? \tag{11}$$

$$R_{\varphi\varphi}=? \tag{12}$$

წარმოადგენს ამ თავის ერთერთ სავარჯიშო ამოცანას (ამოცანა 1)

ბ) *შვარცშილდის ამოხსნა*.

ცენტრალური მასიური სხეულის გარეთ არა გვაქვს ნივთიერება და შესაბამისად ენერგია-იმპულსის ტენზორი აინშტაინის განტოლებების მარჯვენა მხარეში ცარიელა სივრცისათვის უნდა იყოს $T_{\mu\nu}=0$. შესაბამისად აინშტაინის განტოლებები იქნება

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=0 \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu}=0.$$

ეს, რა თქმა უნდა, არ ნიშნავს რომ არა გვაქვს გრავიტაცია. ამისათვის საჭირო იქნებოდა გაცილებით უფრო ძლიერ პირობა, ანუ სრული რიმანის ტენზორის "განულება"

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\rho}=0.$$

ეს გასაგებია ელექტროდინამიკასთან ანალოგიიდანაც. მართლაც, ელექტრომაგნიტური ველი არსებობს (თავისუფალი ველის სახით) ელექტრული მუხტების გარეშეც. ის ფიზიკურად არ არსებობს მხოლოდ მაშინ როცა მისი დაძაბულობის ტენზორი ნულის ტოლია, ანუ $F_{\mu\nu}=0$. მაგრამ განსხვავებით თავისუფალი ელექტრომაგნიტური ველისაგან თავისუფალი გრავიტაციული ველი ცვლის, როგორც დავწრმუნდებით მალე (იხ. ქვემოდ) დრო-სივრცის გეომეტრიულ თვისებებს.

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს ჩვეულებრივი გრავიტაციული ველი გამოწვეული სფერულად სიმეტრიული და სტატიკურად გრავიტირებადი მასიური სხეულით. თუ ავიღებთ $R_{00}=0$ და $R_{rr}=0$ ($R_{\vartheta\vartheta}=0$ და $R_{\varphi\varphi}=0$ პირობები ავტომატურად დაკმაყოფილებულია), მაშინ

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0 \tag{13a}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0 \tag{13b}$$

ამ ორი ტოლობის შეკრებით მივიღებთ $\lambda' + \nu' = 0$ რაც ნიშნავს მათი ინტეგრირების შედეგად, რომ $\lambda + \nu = const_1$. ეს მუდმივი შეიძლება განისაზღვროს $\nu(r \to \infty) = 0$ და $\lambda(r \to \infty) = 0$ პირობებიდან, რაც შეესაბამება ბრტყელ 4-სივრცეს უსასრულო დიდ მანძილებზე. რადგან ამ ზღვარზე უნდა გვქონდეს მინკოვსკის მეტრიკული ტენზორი ვღებულობთ რომ $const_1 = 0$ და $\nu = -\lambda$. ამ ორიდან რომელიმე ერთის გარდაქმნით და ინტეგრებით მივიღებთ:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0 \qquad \Rightarrow \tag{14a}$$

$$e^{-\lambda}\left(\lambda' r - 1\right) + 1 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dr}\left(e^{-\lambda} r\right) = 1 \quad , \quad e^{-\lambda} r = r + const_2 \quad , \quad e^{-\lambda} = 1 + \frac{const_2}{r} = e^{\nu}$$

სადაც, როგორც ვიცით, $\nu, \lambda \to 0$ როცა $r \to \infty$. ახლა ვიპოვოთ $const_2$. ამ კონსტანტის საპოვნელად გამოვიყენოთ განტოლება (7)

$$g_{00} = e^{\nu} = 1 + \frac{const_2}{r}, \tag{14b}$$

რომლის ტანახმად სუსტი ველის მიახლოვებაში (ანუ დიდ დისტანციებზე) მან უნდა მიგვიყვანოს ნიუტონის პოტენციალამდე $V(r)$, ანუ აქედან

$$g_{00} \cong 1 + h_{00} = 1 + 2V/c^2 = 1 - 2\frac{Gm_{\bullet}}{r} \quad \Rightarrow \quad const_2 = -2Gm_{\bullet} \quad . \tag{14c}$$

სადაც $m_{\bullet}$ - ცენტრალური სხეულის მასაა. ამრიგად განტოლებები სრულად ამოხსნილია და დრო-სივრცის ინტერვალისათვის სფერული სტატიკური სხეულის მიერ გამოწვეულ გრავიტაციულ ველში საბოლოოდ ვღებულობთ

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 = c^2 d\tau^2 \tag{15}$$

სადაც სიდიდეს

$$r_g = 2Gm_{\bullet}/c^2 \tag{15'}$$

ეწოდება მასიური სხეულის (მასა $m_{\bullet}$) გრავიტაციული ან შვარცშილდის რადიუსი იმ მეცნიერის სახელის აღსანიშნავად, რომელმაც პირველმა 1916 წელს მიიღო ეს ამოხსნა. ავღნიშნოთ რომ ეს რადიუსი ძალიან მცირეა - დედამიწისთვის ის 1 სმ-ია,

მზისათვის 3 კმ, პროტონისთვის 10^{-52}სმ. საინტერესოა რომ ინტერვალს (15) გააჩნია სინგულარობა სწორედ ამ რადიუსის ტოლ მანძილზე. ასეთი არაჩვეულებრივია ამ სივრცე-დროის გეომეტრია, რომელსაც ჩვენ უფრო დეტალურად დავაკვირდებით ქვემოთ.

3. დრო და მანძილი მასიური სხეულის მახლობლად

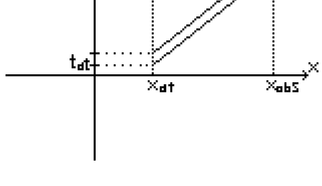
ა) გრავიტაციული წითელი წანაცვლება

მოვათავსოთ დამკვირვებელი მასიური სხეულის მახლობლად. მისი საკუთარი დრო τ დაკავშირებულია მსოფლიო დროსთან შემდეგი თანაფარდობით

$$d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} dt$$

და ამიტომ იცვლება უფრო ნელა მანძილის შემცირებასთან ერთად ანუ როცა $r \to r_g$.

დროის ცვლილება დამოკიდებული მასიურ სხეულთან სიახლოვეზე შეიძლება დაკვირვებულ იქნას (ამ ცვლილებით გამოწვეულ) ატომური სპექტრალური ხაზების წანაცვლების შედეგად. ვთქვათ, გამომსხივებელი ატომი მოთავსებულია r_{at} მანძილზე გრავიტირებად სხეულიდან და დაიკვირვება r_{obs} მანძილზე ამ სხეულიდან. დაუშვად, რომ სინათლის სხივი გამოსხივდა t_{at} დროის მომენტში და მიღებულ იქნა t_{obs} მომენტში, ხოლო მეორე სხივი გამოსხივდა $t_{at} + \Delta t_{at}$ და დაფიქსირდა $t_{obs} + \Delta t_{obs}$. რადგანაც მეტრიკა არ არის დროზე t დამოკიდებული ამ ორი სხივის გზა აბსოლუტურად ერთნაირია. ავირჩიოთ სინათლის მიმართულება x-ღერძის გასწვრივ და ვაჩვენოთ ორივე სხივის მოძრაობა სივრცე-დროის დიაგრამაზე. რადგან სხივი მოძრაობს ერთი და იგივე სიჩქარით c ამ ორი გამოსხივების (pulses) დროის ჩვენ გვაქვს შეასბამისი დროის ინტერვალებისათვის



$$\underset{1^{st}\ pulse}{t_{obs} - t_{at}} \quad = \quad \underset{2^{nd}\ pulse}{\left(t_{obs} + \Delta t_{obs}\right) - \left(t_{at} + \Delta t_{at}\right)}$$

ანუ

$$\Delta t_{at} = \Delta t_{obs} \equiv \Delta t \tag{16}$$

რაც ნიშნავს რომ დროის ინტერვალები ორ გამოსხივებასა და ორ დაფიქსირებას შორის ერთნაირია. მეორეს მხრივ, ადვილად დასანახია რომ მათთან დაკავშირებული საკუთარი დროის ინტერვალები სრულიად განსხვავებულია:

$$\Delta\tau_{at} = \left(1 - \frac{r_g}{r_{at}}\right)^{1/2} \Delta t \tag{17}$$

$$\Delta\tau_{obs} = \left(1 - \frac{r_g}{r_{obs}}\right)^{1/2} \Delta t \quad . \tag{18}$$

ეს კი თავის მხრივ იწვევს შემდეგ თანაფარდობას გამოსხივებული და მიღებული სხივების სიხშირეებს შორის:

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_{at}} = \frac{(\Delta\tau_{obs})^{-1}}{(\Delta\tau_{at})^{-1}} = \left(\frac{1 - \frac{r_g}{r_{at}}}{1 - \frac{r_g}{r_{obs}}}\right)^{1/2} \quad . \tag{19}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ზოგადათ $r_g << r_{at}$, $r_g << r_{obs}$ და ამასთან $r_{at} << r_{obs}$ (ეს კი, როგორც წესი, განპირობებულია თვით ექსპერიმენტით – მაგალითად, განვიხილავთ ატომის გამოსხივებას მომავალს მზიდან ან ვარსკვლავიდან) მაშინ სიხშირის ფარდობითი წანაცვლებისათვის ვღებულობთ

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_{at} - \nu_{obs}}{\nu_{at}} = 1 - \left(\frac{1 - \frac{r_g}{r_{at}}}{1 - \frac{r_g}{r_{obs}}}\right)^{1/2} \cong \frac{r_g}{2}\left(\frac{1}{r_{obs}} - \frac{1}{r_{at}}\right) \cong -\frac{GM}{r_{at}} < 0 \tag{20}$$

ამ მოვლენას უწოდებენ <u>*გრავიტაციულ წითელ წანაცვლებას*</u> რადგან, როგორც ვხედავთ, იგი ყოველთვის უარყოფითია, ანუ ჩვენ ვიმზერთ ნაკლები სიხშირის (ესე იგი უფრო გრძელტალღოვან) გამოსხივებას შორეული გრავიტირებადი ობიექტიდან. ზოგადათ ეს წანაცვლება არ არის დიდი (თუმცა ექსპერიმენტულად დაკვირვებადია). მაგალითად, მზის ზედაპირზე მყოფ ატომისათვის (როდესაც r_{at}

მზის რადიუსის $(7\cdot 10^8\,m)$ ტოლია, მზის შვარცშილდის რადიუსი r_g კი 3კმ) ეს ფარდობითი წანაცვლება სულ 10^{-5} რიგისაა.

ბ) *არაევკლიდური გეომეტრია*

განვიხილოთ ახლა შვარცშილდის სივრცე-დროის *t=const* კვეთა (ფენა). მაშინ მანძილი ფიზიკურ ობიექტებს შორის განისაზღვრება ინტერვალის იმ ნაწილით რომელიცაა (**ის**. (15))

$$dl^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right) \tag{21}$$

ეს კი, როგორც ვხედავთ, არაევკლიდური სივრცეა რაც უშუალოდ გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან რომ შედარებით ევკლიდურ სივრცესთან $(r_g = 0)$ რადიალური მანძილი ამ სივრცეში იზრდება როცა $r \to r_g$. მართლაც, რადიალური მანძილი ორ წერტილს შორის იქნება არა $r_2 - r_1$, არამედ

$$r_{eff} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dl}{dr}dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(1 - r_g / r\right)^{1/2}} \cong \int_{r_1}^{r_2} dr\left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_g}{r}\right) = \left(r_2 - r_1\right) + \frac{r_g}{2}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{22}$$

სადაც ინტერვალის გამოსახულებიდან (21) გამომდინარე ჩვენ გამოვიყენეთ რომ ფიქსირებული რადიალური მიმართულებისათვის

$$d\vartheta = d\varphi = 0, \qquad dl/dr = \left(1 - r_g/r\right)^{-1/2}$$

და ფესვის მწკვრივად დაშლის დროს დავტოვეთ მხოლოდ პირველი რიგის წევრები $r_g / r \ll 1$.

რადიალური მანძილის ზრდა (22) შვარცშილდის სივრცე-დროში ნიშნავს იმავდროულად რომ წრეწირის სიგრძის შეფარდება მის ეფექტურ რადიუსთან l_0 / R_{eff} აღარაა 2π. დავრწმუნდეთ ამაში. განვიხილოთ წრეწირი ცენტრალური სხეულის ეკვატორულ სიბრტყეში: მისი პოლარული კუთხეა $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ და რადიალური კოორდინატი *r*. ამ წრეწირის სიგრძე არის

$$l_0 = \int dl = \int_0^{2\pi} \frac{dl}{d\varphi}d\varphi = 2\pi r \tag{23}$$

სადაც ისევ ინტერვალის გამოსახულებიდან (21) გამომდინარე ჩვენ გამოვიყენეთ რომ ფიქსირებული r-კორდინატისა და პოლარული კუთხის მნიშვნელობებისათვის

$$d\vartheta = dr = 0, \quad dl/d\varphi = r$$

ჩვენ ვხედავთ რომ წრეწირის სიგრზძე დაკავშირებულია მის r-კოორდინატთან ჩვეულებრივად, ანუ ისე როგორც წრეწირის სიგრზძე რადიუსთან ევკლიდურ გეომეტრიაში. ეს არ არის გასაკვირი რადგან კუთხური ნაწილი შვარცშილდის ინტერვალში იგივეა რაც ევკლიდეს ინტერვალში. განვსაზღვროთ ახლა r-კორდინანატის მნიშვნელობა. ამის პირდაპირ გაკეთება შეუძლებელია რადგანაც dl^2 ინტერვალის გამოსახულება (21) სამართლიანია მხოლოდ მასიური სხეულის გარეთ. მიუხედავათ ამისა ჩვენ შეგვიძლია შევადაროთ ორი r_1 და r_2 კოორდინატების (“რადიუსების”) მქონე წრეწირები, რადგან მათი სიგძეების სხვაობაში მასიური სხეულის სავარაუდო ეფექტი უნდა შეიკვეცოს. ისევე როგორც ევკლიდეს გეომეტრიაში, შვარცშილდის სივრცეშიც ორი წრეწირის სიგრძეებს შორის სხვაობა არის

$$l_0^{(2)} - l_0^{(1)} = 2\pi\left(r_2 - r_1\right) \tag{24}$$

მაგრამ, მიუხედავად იმისა რომ ფორმულა (24) სწორად ასახავს წრეწირების სიგძეების სხვაობას, სიდიდე $r_2 - r_1$ ამ ფორმულაში არ არის ჭეშმარიტი რადიალური მანძილი ამ ორ კოორდინატს შორის – ის როგორც ვიცით, მოიცემა ფორმულით (21). თუ გავყოფთ ახლა ერთს მეორეზე მივიღებთ საბოლოოდ

$$\frac{l_0^{(2)} - l_0^{(1)}}{r_{eff}} = 2\pi\left[1 - \frac{1}{2}\frac{r_g}{r_2 - r_1}\ln\frac{r_2}{r_1}\right] \ . \tag{24'}$$

ამრიგად, იმის გამო რომ ცენტრალურ-სიმეტრიულ გრავიტაციულ ველში რადიალური მანძილები იზრდება ხოლო წრეწირის სიგრძე არ იცვლება, გვაქვს სტანდარტული 2π მნიშვნელობის მცირე შემცირება წრეწირის სიგრძის შეფარდებაში მის ეფექტურ რადიუსთან. ეს გადახრა მართლაც ზალიან მცირეა. მაგალითად, მზის სისტემაში - თუ r_1 მზის რადიუსია ($7\cdot10^8\,m$), r_g მისი შვარცშილდის რადიუსი ($3\cdot10^3\,m$), ხოლო r_2 კი მერკურის ორბიტის დიდი ნახევარღერძი ($5.5\cdot10^{10}\,m$) - მაშინ ეს შესწორება ფორმულაში (24’) გამოდის 10^{-7} რიგისა. ამიტომ ბევრ შემთხვევაში მზის სისტემა შეიძლება ადეკვატურად აღიწეროს ევკლიდეს გეომეტრიის ფარგლებში.

4. ნაწილაკის ტრაექტორია მასიური სხეულის მახლობლად.

საცდელი ნაწილაკის ცენტრალურ გრავიტაციულ ველში მოძრაობა შეიძლება კარგი მიახლოებით განვიხილოთ ნიუტონის მექანიკის ფარგლებში რელატივისტური შესწორებების გათვალისწინებით. ჩვენ ზოგადი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებების ამოხსნის ნაცვლად, ჯერ განვსაზღვრავთ მოძრაობის ინტეგრალებს (როგორიცაა ენერგია და კუთხური მომენტი) და შემდეგ გადავალთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებებზე, რომლის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ აინშტაინის თეორიის ძირითად დაკვირვებად შედეგებს ცენტრალურ სიმეტრიულ ველში – პლანეტარული ორბიტების პრეცესიას და სინათლის შუქის გადახრას მასიური სხეულის მახლობლად.

1) ***ჰამილტონ-იაკობის აღწერა: მოკლე ექსკურსი***

ჩვენ ვიცით (**იხ.** ლექციები: ნაწილი II, თავი II), რომ როცა მექანიკური სისტემის ქმედებას (S) განვიხილავთ როგორც დროისა (t) და სივრცული (x^i) კოორდინატების ფუნქციას, მისი ენერგია და იმპულსი გამოისახება ქმედების შესაბამისი წარმოებულებით

$$\mathrm{E} = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad , \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} \tag{25}$$

ამ თანაფარდობების ჩასმა თავისუფალი ნაწილაკის ენერგია-იმპულსის გამოსახულებაში

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\right)^2 = m^2 c^2 \tag{26}$$

გვაძლევს ჰამილტონ-იაკობის განტოლებებას შესაბამის რელატივისტურ შემთხვევაში. ჩვენ შემდგომ გვექნება საქმე ამ ბოლო განტოლების (26) კოვარიანტულ გამოსახულებასთან

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}}-m^2c^2=0 \qquad (27)$$

სადაც მეტრიკული ტენზორი $g^{\mu\nu}$ გამოხატავს იმ ფაქტს რომ გრავიტაციული ველის განხილვის დროს ჩვენ ზოგადათ ვიმყოფებით მრუდ სივრცეში (ანასთან, რადგან ქმედება სკალარია მისი კოვარიანტული წარმოებული ჩვეულებრივი წარმოებულია).

მაგრამ სანამ გადავიდოდეთ შვარცშილდის სივრცე-დროში ზემოთდასახელებული მოვლენების აღსაწერად გავიხსენოთ ჯერ რა ზოგადი თვისებები აქვს ქმედებას როცა ნაწილაკი მოძრაობს სტატიკურ ცენტრალურ-სიმეტრიულ გრავიტაციულ ველში. ასეთ ველში, როგორც ვიცით, მოძრაობა ხდება ეკვატორულ სიბრტყეში, რომელიც შეესაბამება პოლარულ კუთხეს $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. მართლაც, ცენტარალურ ველში ნაწილაკის კუთხური მომენტი

$$M_i=\varepsilon_{ijk}x_j p_k \qquad (i,j,k=1,2,3) \qquad (28)$$

მოძრაობის ინტეგრალია. აქედან სკალარული ნამრავლის აღებით $x_iM_i=0$ ვწრმუნდებით ეს მომენტი ყოველთვის პერპენდიკულარულია ნაწილაკის კოორდინატებისა და რადგან ის ინარჩუნებს თავის მინშვნელობასა და მიმართულებას ნაწილაკის მოძრაობა მხოლოდ ერთ სიბრტყეში ხდება. მეორეც, თუ მავათავსებთ გრავიტირებად მასიურ სხეულს კოორდინატთა სათავეში მაშინ ეს სიბრტყე ეკვატორული სიბრტყე იქნება. თუ გადავალთ შესაბამის სფერულ კოორდინატებში (ეკვატორულ სიბრტყის რადიალურ კოორდინატზე r და აზიმუტალური კუთხეზე φ) კუთხური მომენტი მიიღებს სახეს

$$M=mr^2\dot{\varphi}\quad . \qquad (29a)$$

გარდა კუთხური მომენტისა, ცენტრალურ ველში მოძრაობისას ინახება ნაწილაკის სრული ენერგიაც

$$E\cong mc^2+E_{cl}=mc^2+\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)+U(r) \qquad (29b)$$

რომელიც ჩვენ დავწერეთ კლასიკურ მიახლოვებაში თუმცა კი მისი უძრაობის ენერგიის გათვალისწინებით. მართლაც, რელატივისტური ნაწილაკის სრული ენერგია E კარგი სიზუსტით აისახება ამ ფორმულით თუ მისი კლასიკური ენერგია E_{cl} გაცილებით ნაკლებია მის უძრაობის ენერგიაზე mc^2. გასაგებია, რომ ეს მიახლოვება ჩვენს შემთხვევაში სამართლიანია რადგან ჩვენი ნაწილაკის მოძრაობა, რომელსაც ჩვენ მომავალში გავაიგივებთ პლანეტასთან, კარგი სიზუსტით კლასიკურია.

ამ მოძრაობის ინტეგრალების (29a,b) გათალისწინებით საწყისი თანაფარდობები (25) – ამჯერად დროსა და აზიმუტალური კუთხისათვის (ეკვატორულ სიბრტყეში)

$$\mathrm{E} = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad , \quad M = \frac{\partial S}{\partial \varphi} \tag{25'}$$

გვაძლევენ საშუალებას პირადპირი ინტეგრირებით დავადგინოთ ქმედების სახე ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში

$$S = -E \cdot t + M \cdot \varphi + S_r(r, E, M) \tag{29c}$$

სადაც ფუნქცია S_r (წარმოჩენილი როგორც ინტეგრირების კონსტანტა t-სა და φ-ის მიმართ) ქმედების (ჯერჯერობით) უცნობი რადიალური ნაწილია. ამასთან, რადგან დრო t და აზიმუტალური კუთხე φ ჩვენი სისტემის ციკლური ცვლადებია (ანუ ისინი პირდაპირ არ შედიან სისტემის ლაგრანჟიანსა ან ჰამილტონიანში) მათი წანაცვლება ქმედებაში (29c) ნებისმიერი მნიშვნელობებით არ უნდა ცვლიდეს სისტემის დინამიურ თვისებებს. ამრიგად, ჩვენი ქმედების ზოგადი სახე ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში იქნება

$$S = -E \cdot (t + C_t) + M \cdot (\varphi + C_\varphi) + S_r(r, E, M) \tag{29d}$$

სადაც C_t და C_φ სწორედ ეს შესაძლო კონსტანტური წანაცვლებებია. ავღნიშნოთ, რომ ამასთან ერთად ქმედება, როგორც მოძრაობის ინტეგრალების ფუნქცია, უნდა აკმაყოფილებდეს ექსტრემუმის პირობას სრულ ენერგიასა E და კუთხური მომენტის M მიმართ. ეს ნიშნავს, რომ ნაწილაკის მოძრაობა ხორციელდება იმ ენერგიითა და კუთხური მომენტით, რომელთათვის ქმედებას აქვს ექსტრემალური (მინიმალური) მნიშვნელობა. აქედან ვღებულობთ

$$\frac{\partial S}{\partial E} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -t + \frac{\partial S_r}{\partial E} = C_E \tag{29e}$$

$$\frac{\partial S}{\partial M}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi+\frac{\partial S_r}{\partial M}=-C_\varphi$$

სადაც პირველი განტოლება განსაზღვრავს ნაწილაკის რადიალური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულებას $r(t)$, მეორე კი ნაწილაკის ტრაექტორიას $r(\varphi)$.

ბ) პლანეტარული ორბიტების პრეცესია

ახლა დროა გავითვალისწინოთ თვით სივრცე-დროის თვისებებიც ცენტრალურ-სიმეტრიულ გრავიტაციულ ველში, რომელშიც მოძრაობს ჩვენი ნაწილაკი. შესაბამისად, შვარცშილდის მეტრიკის შემთხვევისათვის (იხ. ფორმულა (7) წინა ლექციებში) ჰამილტონ-იაკობის განტოლება (27) მიიღებს სახეს

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2-m^2c^2=0 \quad . \tag{30}$$

აქედან განტოლების (29d) გამოყენებით მივიღებთ ქმედების რადიალური ნაწილისათვის, რომ

$$S_r=\int\left[\frac{E^2}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2}-\left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right]^{1/2}dr \quad . \tag{31}$$

გადავიდეთ გამოსახულებაში (31) ახალი რადიალური კოორდინატზე r' თანახმად ტოლობისა

$$\begin{aligned} r'^2 &= r\left(r-r_g\right) \\ r' &= r\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{1/2}\approx r-\frac{1}{2}r_g \end{aligned} \tag{32}$$

სადაც (r_g/r)-ის მიმართ დავტოვეთ მხოლოდ პიველი რიგის წევრი. აქედან, და ამასთან ერთად ჩვენი ნაწილაკის (პლანეტის) არა-რელატივისტურობის გამოყენებით (იხ. (29b)), ვღებულობთ საბოლოოდ

$$S_r \cong \int dr \left[2m\left(E_{cl} + \frac{Gm_{\bullet} m}{r} \right) - \frac{1}{r^2}\left(M^2 - \frac{3m^2c^2r_g^2}{2} \right) \right]^{1/2} \qquad (33)$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ განტოლება $r_g = 2Gm_{\bullet}/c^2$ (15') და მოვაცილეთ შტრიხი რადიალურ კოორდინატს $(r' \to r)$.

საინტერესოა, თუმცა კი მოსალოდნელი, რომ გამოსახულება (33) ძირითადათ ემთხვევა შესაბამის წმინდა კლასიკური მოძრაობის ფორმულას

$$S_r^{cl} = \int dr \left[2m\left(E_{cl} - U(r) \right) - \frac{M^2}{r^2} \right]^{1/2} \qquad (34)$$

სტატიკური პოტენციალის ველში, $U(r) = -Gm_{\bullet} m / r$ ($m_{\bullet}$ ცენტრალური სხეულის მასაა). განსხვავება ამ ორ შემთხვევას შორის პრაქტიკულად გულისხმობს მხოლოდ შეცვლას:

$$\underset{(Newton)}{M^2} \quad \rightarrow \quad \underset{(Einstein)}{M^2 - \frac{3m^2c^2r_g^{\ 2}}{2}} \quad . \qquad (34')$$

მაგრამ, როგორც დავინახავთ კვემოთ, ეს პატარა ცვლილება იწვევს პრინციპულად ახალ მოვლენას, რომელსაც უწოდებენ პლანეტების *ორბიტების პრეცესიას*, ანუ მათი ტრაექტორიები აღარაა ზუსტად ელიფსური როგორც ეს არის ნიუტონის მექანიკაში, არამედ მათი ორბიტებიც განიცდიან მცირე ტრიალს. შევჩერდეთ ამ მოვლენაზე უფრო დეტალურად.

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ M^2 კუთხური მომენტის შესწორება (34')-ში, თუმცა კი პროპორციულია მცირე $r_g^{\ 2}$-სიდიდისა, შეიცავს ისეთ დიდ ფაქტორს როგორიცაა m^2c^2, ანუ პლანეტის უძრაობის ენერგიის კვადრატს. ამიტომაცაა ეს შესწორება მნიშვნელოვანია.

შემდეგ, პლანეტის ტრაექტორია განისაზღვრება, როგორც ავღნიშნეთ ზემოთ (იხ. (29e)) განტოლებით

$$\varphi + \frac{\partial S_r}{\partial M} = -C_{\varphi} \quad . \qquad (35)$$

(C_{φ} - ნებისმიერი კონსტანტაა, რომლის მნიშვნელობა შეიძლება დავადგინოთ რაიმე საწყისი ან სასაღვრო პირობიდან). ამრიგად, ვარსკვლავის გარშემო პლანეტის მოძრაობისას აზიმუტალური კუთხის სრული ცვლილება იქნება

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r \qquad . \tag{35'}$$

თუ ახლა დავშლით S_r (33) მწკრივად r_g^2-ის პროპორციული წევრის მიმართ მივიღებთ ΔS_r-სათვის

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{\ cl} - \frac{3m^2c^2r_g^2}{4M}\frac{\partial \Delta S_r^{\ cl}}{\partial M} + O\left(r_g^4\right) \tag{36}$$

სადაც ΔS_r^{cl} არის S_r^{cl}-ის კლასიკური ნაწილის (34) ცვლილება. ამ კლასიკური ნაწილის შეესაბამისი ტრაექტორია კი არის, როგორც ვიცით, ნამდვილი ელიფსი. ეს ნიშნავს, რომ მის მიერ გამწვეული კუთხის ცვლილება პლანეტის სრული მობრუნებისას იქნება

$$\Delta\varphi^{cl} = -\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r^{cl} = 2\pi$$

ამრიგად რელატივისტური შესწორებით გამოწვეული დამატებითი კუთხური ცვლილება აინშტაინის თეორიაში იქნება

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{3m^2c^2r_g^{\ 2}}{4M}\frac{\partial S_r^{cl}}{\partial M}\right) = \frac{3\pi\, m^2c^2r_g^{\ 2}}{2M^2} \qquad . \tag{37}$$

ეს სწორედ ის კუთხეა, რომელიც განსაზღრავს კლასიკური ელიფსური ორბიტის ტრიალს მაშინ როცა პლანეტა აკეთებს ერთ სრულ ბრუნვას ვარსკვლავის გარშემო. აღსანიშნავია, რომ კუთხური მომენტის შენახვის გამო ორბიტის პრეცესია ხდება იგივე ბრუნვის სიბრტყეში, რომელშიც მოძრაობს პლანეტა.

თუ გამოსახულება (37)-ში ჩავსვავთ $r_g = 2Gm_\Theta / c^2$ (სადაც m_Θ- ვარსკვლავის მასაა, m კი პლანეტის მასა) და გამოვიყენებთ ფორმულას (იხ. ამოცანა 2)

$$\frac{Gm_\Theta m^2}{M^2} = \frac{1}{c^2a\left(1-e^2\right)} \tag{38}$$

(a – პლანეტის ორბიტიტალური ელიფსის დიდი ნახევარღერძი, e – ექსცენტრიტეტი) ვიპოვით წლის მანძილზე პლანეტის პრეცესიის კუთხის მნიშვნელობას ელეგანტური ფორმულიდან

$$\delta\varphi = \frac{6\pi G^2 m_\Theta^{\ 2} m^2}{c^2M^2} = \frac{6\pi Gm_\Theta}{c^2a\left(1-e^2\right)} \qquad . \tag{39}$$

ავღნიშნოთ, რომ პლანეტების ორბიტების პრეცესია, კერძოდ მერკურის ორბიტის პრეცესია, ექსპერიმენტულად იქნა აღმოჩენილი ჯერ კიდევ XIX საუკუნეში. მაგრამ მისი ბუნებრივი ახსნა - თუ არა სხვადასხვა ტიპის ეკზოტიკური ჰიპოტეზის მეშვეობით, მაგ. მასათა სპეციფიკური განაწილებით პლანეტის მახლობლად და ა.შ. - ვერ მოხერხდა ნიუტონის მექანიკის ფარგლებში. მეორესმხრივ, ამ პრეცესიის კუთხის მნიშვნელობები მიღებული ფორმულა (39)-ის გამოყენებით შთამბეჭდავ თანხვედრაშია დაკვირვებებთან (ამასთან დაკავშირებით იხ. ამოცანა 3).

გ) ***სინათლის სხივის გადახრა მასიური სხეულთან.***

ახლა განვიხილოთ სინათლის სხივის ტრაექტორია ცენტრალურ-სიმეტრიულ გრავიტაციულ ველში. ამჯერად, როგორც ჩანს, ჩვენ ფაქტობრივად უნდა განვიხილოთ უმასო ნაწილაკის ტრაექტორია, რადგან სინათლის სხივი უმასო თავისუფალი ნაწილაკების – ფოტონების - ერთობლიობაა და ამრიგად მისი ტრაექტორია ისეთივეა როგორიცაა ამ სხივის ცალკეული ფოტონის ტრაექტორია. გამომდინარე აქედან ჩვენ კვლავ გამოვიყენებთ ჰამილტონ-იაკობის აღწერას (იხ. ზემოთ) თუმცა კი ორი მნიშვნელოვანი გამონაკლისის გათვალისწინებით: (1) ნაწილაკის (ანუ ფოტონის) მასას m ყველა ძირითად განტოლებაში (27, 30, 31) ვიღებთ ნულის ტოლად და (2) მისი ენერგია E (წარმოდგენილი ამ განტოლებებში) არის სრული რელატივისტური ენერგია, რომლისათვის მიღებული ზემოთ კლასიკური მიახლოვება (29b) აღარ "მუშაობს". ამასთან ერთად სიდიდე M აღარაა პირდაპირი გაგებით "კუთხური მომემნტი", არამედ ფოტონის მოძრაობის ერთერთი ინტეგრალია.

ამრიგად ქმედების რადიალურ ნაწილის ექნება შემდეგი სახე:

$$S_r(r)=\int\left[\frac{E^2}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2}-\frac{M^2}{r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right]^{1/2}dr \quad . \tag{40}$$

შემოვიყვანოთ ახალი ცვლადი $\rho=cM/E$ და კვლავ გამოვიყენოთ რადიალური ცვლადი $r'\cong r-r_g/2$ (იხ. (32)). მაშინ (r_g/r')-ის რიგის წევრების სიზუსტით მივიღებთ (თან მოვაცილოთ შტრიხი რადიალურ კოორდინატს, $r'\to r$)

$$S_r(r)\cong\frac{E}{c}\int\left[1+\frac{2r_g}{r}-\frac{\rho^2}{r^2}\right]^{1/2}dr\cong\frac{E}{c}\int\left[1-\frac{\rho^2}{r^2}\right]^{1/2}dr+\frac{E}{c}r_g\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \tag{41}$$

სადაც პირველი ინტეგრალი შეესაბამება, როგორც მალე დავინახავთ, კლასიკურ სწორხაზოვან ტრაექტორიას, ხოლო მეორე განაპირობებს სინათლის გადახრას.

სინათლის სხივის (ანუ ფოტონის) ტრაექტორიის საპოვნელად უნდა ისევ მივმართოთ ზოგად განტოლებას (35), რომელიც ρ-ცვლადის გამოყენებით მიიღებს სახეს

$$\varphi + \frac{c}{E}\frac{\partial S_r}{\partial \rho} = -C_\varphi \quad . \tag{35'}$$

საიდანაც S_r ქმედების (41) პირველი და მეორე ინტეგრალიდან ვღებულობთ შესაბამისად

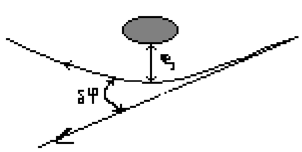
$$\varphi \cong \int \frac{\rho dr}{r^2\left[1-\frac{\rho^2}{r^2}\right]^{1/2}} + r_g \int \frac{\rho dr}{r^3\left[1-\frac{\rho^2}{r^2}\right]^{3/2}} = \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right) + \frac{r_g}{\rho}\frac{1}{\left[1-\frac{\rho^2}{r^2}\right]^{1/2}} \tag{42}$$

სადაც სიმარტივისათვის ჩვენ ორივე ინტეგრირების კონსტანტა შევკვეცეთ C_φ-კონსტანტასთან. აქედან ჩანს რომ ბრტყელი (მინკოვსკის) დრო-სივრცის მიახლოვებაში ($r_g \to 0$) ჩვენ ვღებულობთ წრფის განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში (φ, r)

$$\cos\varphi = \frac{\rho}{r} \quad . \tag{43}$$

ეს წრფე მოთავსებულია ρ მანძილზე წყაროდან და (x,y)-სიბრტყეში y-ღერძის პარალელურია. ამრიგად, პირველი წევრი (42)-ში შეესაბამება სინათლის სხივის სწორხაზოვან გავრცელებას, მეორე წევრი კი, როგორც ჩანს, განაპირობებს მის გადახრას ცენტრალური სხეულის მიმართ.

დავითვალოთ ახლა ამ გადახრის სიდიდე. ვთქვათ, სინათლის სხივი მოდის შორეული დისტანციიდან R ცენტრალურ სხეულამდე, ანუ მასთან უახლოეს წერტილამდე $r=\rho$, და კვლავ შორდება მას ასეთივე დიდ მანძილზე R. მაშინ თანახმად განტოლებისა (42) φ კუთხის-ის სრული ცვლილება იქნება



$$\Delta\varphi = 2\arccos\left(\frac{\rho}{R}\right) + 2\frac{r_g}{\rho}\frac{1}{\left[1-\frac{\rho^2}{R^2}\right]^{1/2}} \tag{44}$$

რადგან ზოგადათ $R >> \rho$ საბოლოოდ ვღებულობთ დამაჯერებელი სიზუსტით, რომ

$$\Delta\varphi \cong \pi + \frac{2r_g}{\rho} \tag{45}$$

საიდანაც შვარცშილდის რადიუსის გამოსახულების ჩასმის შემდეგ სინათლის გადახრის კუთხისათვის ვარსკვლავის (კერძოდ, მზის) მიმართ გამოდის

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4Gm_{\Theta}}{c^2\rho} \tag{46}$$

რაც შესანიშნავ თანხვედრაშია გაზომვებთან (იხ. ამოცანა 4).

5. შავი და თეთრი ხვრელები:
ცალი მიმართულებით მოძრავი ნაწილაკები.

ა) *მოკლე პრეამბულა*

ჩვენ აქამდე ვიხილავდით ნაწილაკის მოძრაობას შვარცშილდის სივრცე-დროში დიდ მანძილზე ცენტრალური სხეულისაგან, სახელდობრ მანძილზე, რომელიც ბევრად აღემატება მის გრავიტაციულ რადიუსს, $r >> r_g$, რაც ბუნებრივია იმ ამოცანებისთვის, რომლებსაც ჩვენ ვიკვლევდით, კერძოდ პლანეტების მოძრაობისათვის და სხვა. ამასთან ერთად, შვარცშილდის მეტრიკის სინგულარობა ცენტრალური სხეულის გრავიტაციის რადიუსზე (იხ. (15)) არ იძლევა საშუალებას ამ განხილვის პირდაპირი განზოგადოებისა მცირე მანძილებზე $r \le r_g$. როგორც ჩანს, ჩვენ დაგვჭირდება არსებული სურათის სერიოზული რევიზია ამ მანძილებზე. არმოჩნდება რომ ეს სინგულარობა დაკავშირებულია იმასთან რომ სტანდარტულ დროის t- ცვლადს აღარ აქვს ფიზიკური აზრი გრავიტაციული რადიუსის რიგის მანძილებზე და ის უნდა შეიცვალოს ახალი ცვლადით. ეს კი მიგვიყვანს ისეთი სივრცე-დროის არეების არსებობაზე, რომლებიც ან მხოლოდ "შთანქავენ" მატერიას და სინათლეს (*შავი ხვრელები*), ან კი მხოლოდ ასხივებენ მათ (*თეთრი ხვრელები*).

ბ) *ნაწილაკის ენერგია-იმპულსი შვარცშილდის სივრცე-დროში – ხარისხობრივი განხილვა.*

წარმოვიდგინოთ სიმარტივისათვის, რომ ცენტრალური სხეული მიუხედავად დიდი მასისა (m_*) წერტილოვანი ობიექტია. ჩვენ გვაინტერესებს ამ სხეულის ველში საცდელი (ასევე წერტილოვანი და m-მასის მქონე) ნაწილაკის მოძრაობა.

უფრო კონკრეტულად, ჩვენ გვაინტერესებს ამ ნაწილაკის რადიალური მოძრაობა, რომელიც აღიწერება ორი საკოორდინატო ცვლადით - დროით $t(\tau)$ და რადიალური მანძილით $r(\tau)$ - რომლებიც თავისთავად ნაწილაკის საკუთარი დროის (τ) ფუნქციებია. ამრიგად ჩვენ ფაქტობრივად გვაქვს 1-განზომილებიანი მოძრააობა შვარცშილდის (1+1) განზომილებიან სივრცე-დროში, რომლის ინტერვალია

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - r_g / r\right) c^2 dt^2 - \left(1 - r_g / r\right)^{-1} dr^2 \qquad (47)$$

რასაც უშუალოდ ვღებულობთ თუ მოვაცილებთ ზოგად ინტერვალს (15) ჩვენი 1-გაზომილებიანი განხილვისათვის უმნიშვნელო კუთხურ ნაწილს, $d\Omega = 0$.

ზოგადათ, როგორც ვიცით, თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობას გრავიტაციულ ველში აღწერს კოვარიანტული ლაგრანჟიანით (ის. II-II-5)

$$L_{gr} = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} \qquad (48)$$

შესაბამისი 4-იმპულსი კი თანაფარდობით

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = m g_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad . \qquad (49)$$

აქედან ვღებულობთ

$$p_{\mu} = \left(p_0, p_i\right) = \left(\frac{mc\beta}{\sqrt{\beta - \frac{v^2}{c^2}\beta^{-1}}}, -\frac{m v_i \beta^{-1}}{\sqrt{\beta - \frac{v^2}{c^2}\beta^{-1}}} \right) \quad , \quad \beta \equiv 1 - r_g / r \qquad (50)$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ თანახმად ინტერვალისა (47) კავშირი საკუთარ და ლაბორატორულ დროებს შორის (იმპულსი p და სიჩქარე v შეესაბამება ნაწილაკის რადიალურ მოძრაობას). როგორც ვხედავთ, ნაწილაკის 4-იმპულსი საგრძნობლად იცვლება გრავიტაციული რადიუსის მახლობლად. მიუხედავად ამისა მისი დისპერსიული თანაფარდობა $p_{\mu} p^{\mu} = m^2 c^2$ ინახება, რაშიც შეგვიძლია პირდაპირ დაწრმუნდეთ

$$p_{\mu} p^{\mu} = g^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} \; = \; \beta^{-1} p_0^2 - \beta \, p^2 = m^2 c^2 \qquad (51)$$

(სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებისათვის რომ $g^{00} = g_{00}^{-1}$ და $g^{rr} = g_{rr}^{-1}$). ეს არ არის გასაკვირი რადგან 4-იმპულსის კვადრატი ლორენცის ჯგუფის ინვარიანტია, რელატივისტური სიმეტრია კი არანაირად არ ირღვევა შვარცშილდის სივრცე-დროში.

ენერგია-იმპულსის გამოსახულებიდან (50) შეიძლება დავადგინოთ ის მანძილები, სადაც შვარცშილდის მეტრიკა არაწინააღმდეგობრივად ''მუშაობს'' მიხედავათ თავისი სინგულარობისა. მართლაც, 4-იმპულსის კომპონენტების (50) რეალური მნიშვნელობებისათვის საჭიროა რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\beta - \frac{v^2}{c^2}\frac{1}{\beta} > 0 \tag{52a}$$

რაც გვაძლევს ამ მანძილების შესაძლო არეებს

$$r > \frac{r_g}{1 - v/c} \quad , \quad r_g > r > \frac{r_g}{1 + v/c} \quad . \tag{52b}$$

როგორც ჩანს, ეს მანძილები დამოკიდებულია ნაწილაკის სიჩქარეზე. თუ ეს სიჩქარე დიდია ($v \sim c$) მაშინ ეს მანძილები ან ბევრად აღემატება გრავიატციულ რადიუს, $r >> r_g$ (პირველი უტოლობა) ან კი ამ რადიუსის ნახევარის რიგისაა, $r \sim r_g/2$ (მეორე უტოლობა). არა-რელატივისტური ნაწილაკებისათვის ($v << c$) ეს პირობებია შესაბამისად ან $r > r_g$ ან კი $r \approx r_g$. ანუ ზოგადათ ნაწილაკი ან შორსაა გრავიტაციული რადიუსიდან ან ყოველთვის $(r_g/2 - r_g)$-რგოლის შიგნითაა. აღსანიშნავია, რომ მეორე შემთხვევაში ნაწილაკის ენერგია უარყოფითია, რაც ნიშნავს, რომ ნაწილაკი ქმნის ბმულ მდგომარეობას ცენტრალურ სხეულთან.

ამრიგად, ნაწილაკს შეუძლია გავიდეს მცირე მანძილებზე, მათ შორის თვით გრავიტაციულ რადიუსზეც r_g, მაგრამ ეს მანძილები ულტრარელატივისტური ნაიწილაკისთვისაც კი მეტია ვიდრე ამ რადიუსის ნახევარი $r_g/2$.

გ) *ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება შვარცშილდის სივრცე-დროში.*

უფრო ზუსტ ინფორმაციას ნაწილაკის მოძრაობის შესახებ შვარცშილდის სივრცე-დროში მივიღებთ თუ უშუალოდ განვიხილავთ მის მოძრაობის განტოლებას. ეს განტოლება მიიღება, როგორც ვიცით, საწყისი ლაგრანჟიანის (48) ვარირებით და ფაქტობრივად წარმოადგენს ნაწილაკის გეოდეზიურის გატოლებას (იხ. ნაწილი II, თავი II, პ.5)

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}=0 \qquad . \qquad (48')$$

ეს განტოლება დროის კომპონენტისათვის $(x^0=ct)$, სადაც

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} \Rightarrow \Gamma^0_{r0}=\Gamma^0_{0r}=\frac{1}{2}g^{00}g_{00,r}=\frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-r_g/r} \quad , \qquad (48'')$$

დანარჩენი ბმულობის კოეფიციენტები კი არ იძლევიან წვლილს სფერული სიმეტრიის შემთხვევაში (იხ. ზემოთ (8)), ღებულობს სახეს

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(1-r_g/r\right)\dot{t}\right]=0 \qquad (53)$$

(წერტილოვანი წარმოებული აქ და ქვემოთ ნიშნავს წარმოებულს საკუთარი დროის მიმართ).

მეორე განტოლებას, რომელიც ასევე აკავშირებს t და r ცვლადებს მივიღებთ უშუალოთ შვარცშილდის ინტერვალიდან (48) - თუ გავყოფთ მის ორივე მხარეს საკუთარი დროის კვადრატზე

$$\dot{r}^2=\left(1-r_g/r\right)^2c^2\dot{t}^2-c^2\left(1-r_g/r\right) \qquad (54)$$

ამ განტოლების დიფერენცირების და პირველი განტოლების (53) გამოყენების შედეგად ვღებულობთ საბოლოოდ

$$\ddot{r}=-\frac{1}{2}c^2\left(\frac{r_g}{r^2}\right)=-\frac{Gm_\bullet}{r^2} \qquad . \qquad (55)$$

ეს განტოლება, როგორც ვხედავთ, ზუსტად იგივე სახისაა რაც განტოლება, რომელიც აღწერს არა-რელატივისტური კლასიკური ნაწილაკის მოძრაობას ნიუტონის პოტენციალში (ერთადერთი განსხვავებაა, რომ აქ დროის პარამეტრი ნაწილაკის საკუთარი დროა ნიუტონის აბსოლუტური დროის მაგივრად)[9].

როგორც ვიცით, ამ განტოლების ამოხსნისას არავითარი პრობლემები არ ჩნდება, ანუ ნაწილაკი შეიძლება გავიდეს ნებისმიერ წერტილში, მათ შორის

[9] ეს დამთხვევა სრულებით რელატივისტურსა და არა-რელატივისტურ აღწერას თავისთავად საინტერესო ფაქტია.

წერტილშიც $r = r_g$. დავწრმუნდეთ ამაში განტოლების პირდაპირი ამოხსნით. მოვძებნოთ ეს ამოხსნა შემდეგი ზოგადი სახით

$$r(\tau) = (A \pm B\tau)^{\alpha} \tag{56}$$

თუ ჩავსვამთ ახლა ამ ამოხსნას განტოლებაში

$$\ddot{r} = \alpha(\alpha - 1)B^2(A \pm B\tau)^{\alpha - 2}$$

გაუტოლებთ შესაბამის სიდიდეებს

$$\alpha(\alpha - 1)B^2 = -\frac{1}{2}c^2 r_g$$

შემოვიყვანოთ საზაღვრო პირობას როგორც

$$r(0) \equiv r_0 = A^{\alpha}$$

და მოვითხოვთ ორივე წევრისთვის (56)-ში მანძილის განზომილებას (α=*2/3*), მივიღებთ საბოლოოდ

$$r(\tau) = (r_0^{3/2} \pm \frac{3}{2} c r_g^{1/2} \tau)^{2/3} \quad . \tag{57}$$

ამ ამოხსნის თანახმად დროის საწყის მომენტში (τ=0) ნაწილაკი გადის წერტილზე r_0. ამასთან, დადებითი ნიშანი შეესაბამება გარეთ მიმავალ ნაწილაკს, უარყოფითი კი შიგნით იმართულს. ამაში ადვილად დავწრმუნდებით, თუ დავითვლით ნაწილაკის სიჩქარეს ამ დროის მომენტში

$$\dot{r}(0) = \pm c\left(r_g / r_0\right)^{1/2} \tag{58}$$

ნაწილაკს, როგორც ჩანს (57)-დან, მართლაც შეუძლია შემოვიდეს წერტილიდან $r = r_0$ წერტილში $r = r_g$ სასრულ დროში

$$\Delta\tau = \frac{2}{3}\frac{r_0^{3/2} - r_g^{3/2}}{c r_g^{1/2}} \tag{59}$$

ასე რომ ნაწილაკის საკუთარი დროის მიმართ არანაირი პრობლემა არ ჩნდება.

მაგრამ ვნახოთ ახლა დამკვირებლის დროის რა მონაკვეთს Δt შეესაბამება საკუთარი დროს ინტერვალი $\Delta\tau$ (59). როგორც გამომდინარეობს განტოლების (53) ერთჯერადი ინტეგრირების შედეგიდან (ინტეგრირების კონსტანტას ვირჩევთ 1-ის ტოლად სიმარტივისათვის)

$$dt = \frac{d\tau}{1 - r_g / r} \tag{60}$$

ეს დრო, როგორც ჩანს, უნდა უსასრულოდ იზრდებოდეს როცა $r \to r_g$. ზუსტი პასუხი t-ს სასრულო მნიშვნელობისათვის მიღებულია ქვემოთ, იხ. (62). ამრიგად მიუხედავად იმისა რომ ნაწილაკი დაბრკოლების გარეშე გადის გრავიტაციულ რადიუსზე მას სჭირდება ამისთვის უსასრლოდ დიდი კოორდინატული (ანუ დამკვირებლის) დრო t, რაც ფიზიკურად გაუგებარია. გამონდინარე აქედან შეიძლება ვიფიქროდ, რომ შვარცშილდის მეტრიკის სინგულარობა წმინდა კოორდინატული სინგულარობაა და თუ გადავალთ სხვა კოორდინატებზე, კერძოდ სხვა კოორდინატულ დროზე ეს სინგულარობა შეიძლება გაქრეს. ამაზე გვაფიქრებინებს ის ფაქტიც რომ ეს სინგულარობა არ გააჩნია სივრცე-დროის სიმრუდის მახასიათემბლებს – არც რიჩის სკალარს და არც რიჩის ტენზორის კომპონენტებს (9-12) (იხ. ამოცანა 1).

დ) *დრო მცირე მანძილებზე.*

იმის დასადგენად რა სახე უნდა ჰქონდეს ახალ კოორდინატულ დროს ვაინტეგრიროდ განტოლება (60) ბოლომდე

$$t = \int \frac{d\tau}{1 - r_g / r} \quad \Rightarrow \quad r_g^{1/2} ct = \pm \int \frac{r^{3/2} dr}{r - r_g} \tag{61}$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ განტოლება r-კოორდინატისთვის (57), რომლის თანახმად

$$d\tau = \pm \frac{r^{1/2} dr}{r_g^{1/2} c}.$$

აქედან ინტეგრალის (61) პირდაპირი აღებით მივდივართ საბოლოოდ გამოსაულებამდე

$$r_g^{1/2} ct = \pm \left[\frac{2}{3} r^{3/2} + 2 r_g r^{1/2} + \; r_g^{3/2} \ln \left(\frac{r^{1/2} - r_g^{1/2}}{r^{1/2} + r_g^{1/2}} \right) \right] \qquad (62)$$

სადაც, როგორც ითქვა ზემოთ, დადებითი ნიშანი შეესაბამება გარეთ მიმავალ ნაწილაკს, უარყოფითი კი შიგნით მიმართულს.

ამ თანაფარდობიდან შეიძლება დავინახოთ რა “ტიპის” დრო უნდა შემოვიყვანოთ, რომ შევკვეცოთ მისი ლოგარითმული სინგულარობა. მაგრამ, როგორც ჩანს, შეუძლებელია ასეთი დროის შემოყვანა ერთბაშად ორივე – გარეთ მიმართული და შიგნით მიმართული – ნაწილაკისათვის. ეს დრო პრინციპულად სხვადასხვა სახის უნდა იყოს ამ ორი შემთხვევისათვის. მართლაც თუ ჩვენ შემოვიყვანთ დროის u-პარამეტრს

$$u = ct + r + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \qquad (63a)$$

მასში, როგორც ადვილად სანახავია (62)-ის ჩასმით, იკვეცება სინგულარობა შიგნით მიმართული ნაწილაკისათვის (ნიშანი “-” (62)-ში), ანუ

$$u = r - \frac{2}{3} r \left(\frac{r}{r_g} \right)^{1/2} - 2 \left(r_g r \right)^{1/2} + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} + 1\right)^2 \quad . \qquad (63a')$$

დროის ალტერნატიული w-პარამეტრში კი

$$w = ct - r - r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \qquad (63b)$$

იკვეცება ეს სინგულარობა გარეთ მიმართული ნაწილაკისათვის (ნიშანი “+” (62)-ში)

$$-w = r - \frac{2}{3} r \left(\frac{r}{r_g} \right)^{1/2} - 2 \left(r_g r \right)^{1/2} + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} + 1\right)^2 \quad . \qquad (63b')$$

მათთან დაკავშირებული ინტერვალებიც, როგორც შეიძლება უშუალოდ დავწრმუნდეთ (63a,b)-ს ჩასმით (47)-ში, ასევე არა-სინგულარული არიან:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - r_g / r\right) du^2 - 2 du dr \quad , \qquad (64a)$$

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - r_g / r\right) dw^2 + 2dwdr \quad . \tag{64b}$$

ამრიგად ჩვენ ვხედავთ რომ დროის ცვლადების სპეციალური შერჩევით შეიძლება გავაქროთ მეტრიკის სინგულარობა გრავიტაციულ რადიუსზე, თუმცა კი მას რჩება ბუნებრივი სინგულარობა $r=0$ წერტილში (დაკავშირებული ცენტრალური გრავიტაციული ველის სპეციფიკასან).

დროის ახალი ცვლადები u და w იყო შემოყვანილი ედინგტონის მიერ გასული საუკუნის 30-წლებში, მაგრამ მათი ფიზიკური არსი საბოლოოდ დაადგინა ფინკელსტაინმა 1958 წელს, რაზეც ჩვენ დეტალურად ვისაუბრებთ ქვემოთ. მიუხედავად იმისა რომ არსებობს დროის (და სივრცისაც) სხვა პარამეტრიზაციებიც (ლემეტრის, კრუსკალ-შეკერსის და სხვა) ედინგტონ-ფინკელსტაინის პარამეტრიზაცია შედარებით უბრალო და გამჭვირვალეა.

დ) ***შავი და თეთრი ხვრელები.***

განვიხილოთ დროის ახალ ცვლადებში სინათლის ყოფაქცევა გრავიტაციულ რადიუსთან მიმართებაში. სინათლის სხივი, რომლისათვის ინტერვალები (64) ნულოვანია, ანუ $d\tau = 0$, აკმაყოფილებს პირობას

$$du = 0 \quad , \quad u = const$$

პირველი ინტერვალისთვის (64a) ან

$$dw = 0 \quad , \quad w = const$$

მეორე ინტერვალისთვის (64b)[10]. თუ ახლა - ამის გათვალისწინებით - გავადიფერინცირებთ განტოლებებს (63a,b) დავინახავთ, რომ დიდ r-მანძილებზე სადაც ‘‘ძველი’’ ცვლადი t სწორად განსაზღვლას დროს, სხივის კოორდინატური სიჩქარეებია შესაბამისად

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{c}{1 - r_g / r} \approx -c \tag{65a}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{1 - r_g / r} \approx c \tag{65b}$$

---

[10] ეს პირობები ფაქტობრივად წარმოადგენენ სინათლის სხივის გეოდბეზიურების განტოლებებს მოცემული ინტერვალებისთვის.

სადაც პირველი თანაფარდობა წარმოადგენს შიგნით მიმართულ სინათლის სხივს, ხოლო მეორე – გარეთ მიმართულს. ამრიგად ჩვენ გვაქვს ორი შესაძლო არე გრავიტაციული რადიუსის შიგნით – ერთი, რომელიც აღიწერება u-დროით და ყოველთვის მხოლოდ ''შთანქავს'' სინათლეს, და მეორე, რომელიც აღიწერება w-დროით და ყოველთვის მხოლოდ ''ასხივებს'' მას. პირველ არეს უწოდებენ *შავ ხვრელს*, მეორეს კი შეიძლება დავარქვათ *თეთრი ხვრელი.*

ანალოგიური არგუმენტების გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ეს ორი არე არსებობს არა მხოლოდ სინათლისათვის არამედ მასიური ნაწილაკებისათვისაც. მართლაც, დავითვალოთ ამ ნაწილაკების სიჩქარეები თანახმად ფორმულებისა (63a',b'). ამ თანაფარდობების დიფერენცირებით u-სა და w-ს მიმართ ვღებულობთ შესაბამის სიჩქარეებს ($V_u \equiv dr/du$, $V_w \equiv dr/dw$)

$$V_{u,w} = \pm \frac{1}{1-(r_g/r)^{1/2}-(r\ /r_g)^{1/2}+2/(1+r/r_g)} \qquad (66)$$

საიდანაც ვპოულობთ ამ სიჩქარეების მნიშვნელობებს სხვადასხვა მანძილებზე

$$V_{u,w}(r=r_g)=\mp\frac{1}{2} \quad , \quad V_{u,w}(r<<r_g)\approx\mp\left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2} \quad , \quad V_{u,w}(r>>r_g)\approx\mp\left(\frac{r_g}{r}\right)^{1/2} \qquad (67)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, V_u სიჩქარე ყველგან მიმართულია შიგნით, ხოლო V_w სიჩქარე კი გარეთ, რაც შეესაბამება შავი და თეთრი ხვრელი არსებობის პირობას ზემცირე მანძილებზე.

ზოგადი ფიზიკური არსი ამ მოვლენისა სწორედ მდგომარეობს იმაში რომ განსხვავებით დიდი მანძილებისა, სადაც ნაწილაკს აქვს რადიალური სიჩქარის ორივე შესაძლო მიმართულება, გრავიტაციული რადიუსის რიგის მანძილებზე ეს ხდება შეუძლებელი თუ არ გვინდა რომ კოორდინატული (ანუ დამკვირებლის) დრო უსასრულოდ იზრდებოდეს როცა ნაწილაკი უახლოვდება გრავიტაციულ სფეროს და კვეთს მას.

ეს კავშირი დიდსა და პატარა მანძილებს შორის კიდევ უფრო მკვეთრად გამოჩნდება თუ ავიღებთ მოდიფიცირებულ ედინგტონ-ფინკელსტაინის დროის ცვლადებს

$$cu = ct + r_g \ln\left(\frac{r^{1/2}-r_g^{1/2}}{r^{1/2}+r_g^{1/2}}\right) \qquad (68a)$$

$$cw = ct - r_g \ln\left(\frac{r^{1/2} - r_g^{1/2}}{r^{1/2} + r_g^{1/2}}\right) \tag{68b}$$

რომლებიც არა-სინგულარული არიან r_g-წერტილში და ამასთან ერთად გლუვად გადადიან ჩვეულებრივ კოორდინატულ დროში t დიდ მანძილებზე $r >> r_g$. მათთან დაკავშირებული ინტერვალებია

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - r_g/r\right)c^2 du^2 - 2(r_g/r)^{3/2} cdudr - [1 + r_g/r + (r_g/r)^2]dr^2 \tag{69a}$$

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - r_g/r\right)c^2 dw^2 + 2(r_g/r)^{3/2} cdwdr - [1 + r_g/r + (r_g/r)^2]dr^2 \ , \tag{69b}$$

რომლებიც ასევე არა-სინგულარული არიან. ამასობაში როცა მივდივართ დიდი მანძილებისკენ ეს ინტერვალები, როგორც გხედავთ, $(r_g/r)^{3/2}$-რიგის წევრების სიზუსტით ემთხვევიან შვარცშილდის საწყისს ინტერვალს (47).

თუ გამოვიყენებთ ახლა ამ ინტერვალებს სინათლის სხივისთვის ($d\tau = 0$) მივიღებთ კვადრატულ განტოლებებს სხივის $V_{u,w}$-სიჩქარეებისათვის

$$\left(1 - r_g/r\right) - 2(r_g/r)^{3/2}\frac{V_u}{c} - [1 + r_g/r + (r_g/r)^2]\left(\frac{V_u}{c}\right)^2 = 0 \tag{70a}$$

$$\left(1 - r_g/r\right) + 2(r_g/r)^{3/2}\frac{V_w}{c} - [1 + r_g/r + (r_g/r)^2]\left(\frac{V_w}{c}\right)^2 = 0 \tag{70b}$$

ამ განტოლებების ამონახსნებისათვის გვაქვს შესაბამისად

$$\frac{V_u}{c} = \frac{-(r_g/r)^{3/2} \pm 1}{1 + r_g/r + (r_g/r)^2} \tag{71a}$$

$$\frac{V_w}{c}=\frac{(r_g\ /r)^{3/2}\pm 1}{1+r_g\ /r+(r_g\ /r)^2} \tag{71b}$$

საიდანაც ჩანს რომ მცირე მანძილებზე ($r<r_g$) V_u-სიჩქარე ყოველთვის მიმართულია შიგნით , ხოლო სიჩქარე V_w კი გარეთ. ამასთან ერთად დიდ მანძილებზე $r>>r_g$ ეს (ერთი ნიშნის) სიჩქარეები გადადიან კოორდინატულ სიჩქარეში, რომელსაც გააჩნია ორივე შესაძლო მიმართულება

$$V_u\approx \pm c\ \ ,\quad V_w\approx \pm c \tag{72}$$

რაც ეხება მასიურ ნაწილაკების $V_{u,w}$-სიჩქარეებს, მათ კავშირს კოორდინატულ სიჩქარესთან $v=dr/dt$

$$V_u=\frac{dr}{du}=v\frac{dt}{du}\quad ,\ \ V_w=\frac{dr}{dw}=v\frac{dt}{dw} \tag{73}$$

მივიღებთ თუ გავაწარმოებთ ცვლადების გამოსახულებებს (68a,b) u-ს და w-ს მიმართ. ამრიგად შეფარდების (73) თანახმად ვღებულობთ

$$V_{u,w}=\frac{v}{1\pm\frac{v}{c}\frac{(r_g\ /r)^{3/2}}{1-r_g\ /r}} \tag{74}$$

საიდანაც, ისევე როგორც ზემოთ სინათლის სხივის შემთხვევაში, ნათლად ჩანს რომ მცირე მანძილებზე ($r<r_g$) V_u-სიჩქარე ყოველთვის მიმართულია შიგნით , ხოლო სიჩქარე V_w კი მიმართულია გარეთ. ამასთან, დიდ მანძილებზე ($r>>r_g$) ეს სიჩქარეები გადადიან კოორდინატულ სიჩქარეში

$$V_u\approx v\ \ ,\quad V_w\approx v \tag{75}$$

რომელსაც გააჩნია ორივე შესაძლო მიმართულება. მართლაც,

$$v/c=\pm(r_g\ /r)^{1/2}(1-r_g\ /r\ ) \tag{76}$$

რაც შეიძლება დავადგინოთ განტოლების (62) გაწარმოებით კოორდინატული t-დროის მიმართ[11]. ეს სიჩქარე, როგორც გხედავთ, თავისთავად მიისწარფის ნულისკენ როცა $r \to \infty$.

ახლა მოკლედ შავი და თეთრი ხვრელების ფიზიკური დაკვირვების მხარეზე. მიუხედავად იმისა რომ შავი ხვრელების პირდაპირი დამზერა წარმოადგენს გარკვეულ პრობლემას მათი ირიბი დაკვირვება, როგორც უხილავი გრავიტაციის წყაროებისა, სრულებით შესაძლებელია, რაც სინამდვილეშიც ხდება მრავალი გრავიტაციული ''ანომალიების'' შესაწვლის შედეგად. მეორეს მხრივ, ბუნებრივია შავი ხვრელების წარმოშობა ვარსკვლავების გაციებისა და კოლაფსის შედეგად - როცა ვარსკვლავი კოლაფსირდება საკუთარი გრავიტაციული რადიუსის ზომამდე ის გადაიქცევა შავ ხვრელად. მაგრამ ყველა შემთხვევაში ჩვენ პრინციპულად ვერ ვფლობთ ინფორმაციას იმის შესახებ რა ხდედა გრავიატაციული r_g-სფეროს შიგნით, რადგან არც ნაწილაკი და არც სინათლის სხივი არ გამოდის მის გარეთ (მათი სიჩქარეები, როგორც ვნახეთ, ყოველთვის მიმართულია მხოლოდ შიგნით). ამ სფეროს უწოდებენ *შემთხვევათა ჰორიზონტს* (*event horizon*), რადგან ჩვენ შეგვიძლია მივადევნოთ თვალი ნაწილაკს ან სინათლეს მხოლოდ ამ მანძილებამდე – მერე ისინი სამუდამოთ ''იკარგებიან'' შავ ხვრელში.

განსხვავებით შავი ხვრელებისაგან თეთრი ხვრელების წარმოშობა და არსებობა, როგორც ჩანს, საკმაოდ პრობლემატურია, თუმცა კი ძალიან საინტერესო. სერიოზული პასუხი კითხვაზე - შეესაბამება თეთრ ხვრელს რაიმე სახის ფიზიკური რეალობა, თუ ის მხოლოდ თეორიული არტეფაქტია – ჯერჯერობით არ არსებობს.

[11] ავღნიშნოთ რომ, მიუხედავათ სინგულარული სახისა, სიჩქარეები (74) სინამდვილეში სინგულარული არ არიან. ეს მოჩვენებითი სინგულარობა იკვეცება კოორდინატული სიჩქარით (76).

ამოცანები

1. იპოვნეთ რიჩის ტენზორის არანულოვანი კომპონენტები (9-12) ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში. რა სახე აქვს რიჩის სკალარს? დარწმუნდით რომ შვაცშილდის სინგულარობა არ გააჩნია არც რიჩის სკალარს და არც რიჩის ტენზორის კომპონენტებს.

2. იპოვეთ თავისუფალი ნაწილაკის ენერგია-იმპულსი დაკავშირებული ედინგტონ-ფინკელსტაინის დროის ცვლადებთან u და w. რა სახე აქვს დისპერსიულ თანაფარდობას?

3. მიიღეთ ფორმულა

$$\frac{Gm_{\Theta}m^2}{M^2}=\frac{1}{a\left(1-e^2\right)}$$

(აქ G - ნიუტონის კონსტანტაა, m_{Θ} - რაღაც ცენტრალური სხეულის (მაგ., მზის) მასა, m და M პლანეტის მასა და კუთხური მომენტი, a – დიდი ნახევარღერძი, e - ექსცენტრიტეტი).

4. აჩვენეთ, რომ $\delta\varphi$-ს პრეცესია 100 დედამიწის წლის განმავლობაში არის 3.8'' დედამიწისთვის და 43'' მერკურისთვის. გამოიყენეთ პარამეტრის შემდეგი მნიშვნელობები:
   (1) $M_{\Theta}=2\cdot 10^{33}g$
   (2) $a_{Earth}=149.6\cdot 10^{11}cm \qquad e_{Earth}=0.017$
   (3) $a_{Merc}=57.9\cdot 10^{11}cm \qquad e_{Merc}=0.206$

(4) მერკური აკეთებს 415 მობრუნებას 100 წელიწადში.

5. დაითვალეთ, რას უდრის მზესთან სინათლის გადახრის კუთხე. გამოიყენეთ მზის მასის მნიშვნელობა $m_{\Theta} = 2 \cdot 10^{33} g$. აჩვენეთ თუ მზესთან გამავალი სინათლის სხივის პარამეტრი ρ მზის რადიუსის $R_{\Theta} = 6.95 \cdot 10^{10} cm$ ტოლია მაშინ $\delta\varphi = 1.75''$.

6. აჩვენეთ რომ სფერული სიმეტრიის შემთხვევაში (იხ. (8)) არ სრულდება ჰარმონიული კოორდინატების პირობა $g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$. რატომ?

7. იპოვეთ თავისუფალი ნაწილაკის ენერგია და იმპულის გაამოსახულება დაკავშირებული ცვლადებთან (68a,b) და შესაბამისი დისპერსიული თანაფარდობა.
8. აჩვენეთ რომ ნებისმიერი თავისუფალი ფოტონისათვის, რომელიც მოძრაობს ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში მისი 4-იმპულსის დროის ‘‘ქვემო’’კომპონენტი p_0 მუდმივია ფოტონის მსოფლიო წირის გასწვრივ. იპოვეთ როგორ იცვლება ამ ველში იმპულსის ‘‘ზემო’’ კომპონენტი p^0.

მითითება: გამოიყენეთ გეოდეზიურის განტოლება ფოტონისათვის ცენტრალურ-სიმეტრიულ ველში.

ლიტერატურა

1. L. Landau and E. Lifshitz : “Mechanics” (vol.1)*, “Field Theory” (vol.2)*, Pergamon , 1980.

2. G. Goldstein, “Classical Mechanics”*. Cambridge, 2002.

3. T.W.B. Kibble and F.H. Berkshire, “Classical Mechanics”, Longman, 1996

4. ა. ხელაშვილი, “კლასიკური თეორიული მექანიკა”, თსუ, 2005.

5. E. Taylor and J. Wheeler : “Spacetime Physics”*, W.H. Freeman, 1996.

6. I. Lawrie : “A unified Grand Tour of Theoretical physics”, Adam Hilger, 1989.

7. W. Burke: “Spacetime , Geometry and Cosmology”*, Mill Valley, 1980.

8. P.A.M. Dirac: “General Theory of Relativity”*, A Wiley-Interscience, 1998.

9. C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler : “Gravitation”*, W.H. Freeman, 1973.

10. S. Weinberg : “Gravitation and Cosmology”*, John Wiley, 1972.

(*)[12]

[12] (*) - არსებობს ამ წიგნების რუსული თარგმანი